



TITLE:

Untersuchungen über das dynamische Verhalten von Hochgeschwindigkeitsgetrieben(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

Kubo, Aizoh

CITATION:

Kubo, Aizoh. Untersuchungen über das dynamische Verhalten von
Hochgeschwindigkeitsgetrieben. 京都大学, 1971, 工学博士

ISSUE DATE:

1971-07-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k1128>

RIGHT:

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS
DYNAMISCHE VERHALTEN VON
HOCHGESCHWINDIGKEITSGETRIEBEN

VON

AIZOH KUBO

(1971)

**UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS
DYNAMISCHE VERHALTEN VON
HOCHGESCHWINDIGKEITSGETRIEBEN**

VON

AIZOH KUBO

(1971)

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS
DYNAMISCHE VERHALTEN VON
HOCHGESCHWINDIGKEITSGETRIEBEN

Von der
Fakultät für Maschinenwesen der Kyoto Universität
zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von
Diplom-Ingenieur Aizoh K U B O
aus Kyoto

1971

V o r w o r t

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Forschungsstudent in der Abteilung für Maschinenwesen der Universität Kyoto.

Besonders dankbar bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. T. Aida, daß ich die Möglichkeit hatte, an seinem Institut zu arbeiten. Durch seine wohlwollende Unters^tützung und großzügige Förderung konnte ich diese Arbeit durchführen.

Herrn a.o. Prof. Dr.-Ing. S. Sato danke ich sehr für seine wertvollen Anregungen während meiner Arbeit und für die viele mir zu Diskussion zur Verfügung gestellte Zeit.

Meinem Kollegen, Herrn Dipl.-Ing. S. Kiyono, möchte ich danken, daß er für die theoretische Entwicklung und bei der Durchführung meiner Untersuchungen hilfreiche Ideen beigesteuert hat und bei den schwierigen Problemen mein bester Diskussionspartner war.

Ebenfalls gilt mein Dank allen meinen Mitarbeitern für ihre Tätigkeit bei der Durchführung der umfangreichen Versuche.

Aizoh Kubo

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Abkürzungen	iv
1. Einleitung	1
2. Prüfstand	3
2-1. Konstruktion	3
2-2. Betriebseigenschaften	7
2-2-1. Verlustleistung	7
2-2-2. Verschleiß der Zahnräder	11
3. Theoretische Grundlagen zur Klärung des Phänomens der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars	16
3-1. Theoretische Untersuchungen über die Umfangsschwingungen	16
3-1-1. Gleichungen für die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars	16
3-1-2. Stabilität der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars	18
3-1-3. Grundsätzliche Eigenschaften der Lösung der erzwungenen Gleichung für die Umfangsschwingungen	21
3-2. Dynamische Belastung eines Zahnrades	28
3-3. Einführung des Eingriffsstoßes in die Berechnung	31
3-4. Dynamischer Überdeckungsgrad	34
4. Messung der dynamischen Beanspruchung am Zahnfuß	36
5. Einfluß der Flankenformfehler auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung	39
5-1. Bei einem fehlerfreien Zahnradpaar	39
5-2. Bei einem Zahnradpaar, dessen Zähne fast alle in gleicher Weise verschlissene Flankenformen aufweisen	42

	<u>Seite</u>
5-3. Bei einem Zahnradpaar mit Zähnen von ungleich verschlissenen Flankenformen	43
5-4. Abnahme der tatsächlichen Haupteigenfrequenz durch die Zahnflankenabtrennung	49
5-5. Einfluß der Verschlechterung der Formgenauigkeit des Zahnrades auf die dynamische Belastung	50
6. Einfluß des Eingriffsteilungsfehlers auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung	54
6-1. Differenz zwischen den Eingriffsteilungen der Zahnräder des Paares, und Berechnungsmethoden für die dynamische Zahnfußbeanspruchung	54
6-2. Abtriebszahnrad	56
6-3. Antriebszahnrad	66
7. Einfluß des Summenteilungsfehlers auf die dynamische Belastung im Hochgeschwindigkeitsbetrieb	71
8. Der durch die dynamische Flankenkraft verursachte Anpreßdruck bei Geradverzahnung	74
9. Schmiermethode und ihr Einfluß auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung (Dämpfungssteuerung bei Umfangsschwingungen eines Zahnradpaares durch eine bestimmte Schmiermethode)	77
9-1. Einfluß des Dämpfungsfaktors auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung	77
9-2. Bisherige Methoden zur Verstärkung des Dämpfungsfaktors der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaares	80
9-3. Zentrifugalschmierung bei Zahnrädern	82
9-4. Einfluß der Schmiermethode auf die dynamische Belastung und Wirkung der Zentrifugalschmierung	84

	<u>Seite</u>
9-5. Vergleich zwischen den Schmiermethoden in Bezug auf den Leistungsverlust	92
10. Dynamisches Verhalten von Schrägverzahnungen	95
10-1. Methode zur Untersuchung der Umfangsschwingungen bei Schrägverzahnung	95
10-2. Umfangsschwingungen bei Schrägverzahnung	101
11. Beispiel eines Zahnbruchs bei einem Hochgeschwindigkeitsgetriebe	113
11-1. Das Getriebe und die Vorgeschichte zu dem Vorfall	113
11-2. Zustand des gebrochenen Zahnrades	116
11-3. Annahmen über die Ursachen des Zahnbruchs	119
12. Zusammenfassung	125
Anlage I Stabilität der Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares	129
Anlage II Program für Berechnung der Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaares und der dynamischen Belastung	132
Anlage III Eingriffsstoß	148
Schrifttum	153

Abkürzungen

m	auf die Eingriffslinie reduzierte Masse des Zahnradpaars
x	Differenz zwischen dem Drehweg des Abtriebs- zahnrades und dem des Antriebszahnrades auf der Eingriffslinie $x_2 - x_1$
x_1	Drehweg des Antriebszahnrades auf der Eingriffslinie
x_2	Drehweg des Abtriebszahnrades auf der Eingriffslinie
t	Zeit
x_n	momentane Lage der Berührungslinie auf der Zahnflanke
k_a	Zahnfederhärte eines Zahnpaars
$k(x, x, e_a)$	Gesamtzahnfederhärte
$k(x)$	erste Näherung der Gesamtzahnfederhärte
k_i	durchschnittliche Zahnfederhärte während Einzeleingriff
k_{ii}	durchschnittliche Zahnfederhärte während Doppeleingriff
K	durchschnittliche Gesamtzahnfederhärte
e_a	Gesamtfehler eines Zahnepaars
e_0	Differenz zwischen den Eingriffsteilungen des Antriebs- und des Abtriebszahnrades (am anlaufenden Doppeleingriff)
e_i od. e_j	Eingriffsteilungsfehler
E	Summe der Eingriffsteilungsfehler
$F(e_a, k_a)$	durch Fehler des Zahnrades erzwungene Kraft, d.i. Störfunktion der Umfangsschwingungen

f_b	Frequenz der Störfunktion der Umfangsschwingungen
A	Amplitude der Störfunktion der Umfangsschwingungen
$D(x, x, e_{\omega})$	viskose Dämpfung
ξ	Dämpfungsfaktor
w	auf das Zahnrad einwirkende statische Kraft M_0/r_g
w_d	auf das Zahnrad einwirkende dynamische Gesamtkraft
F_d	auf eine Zahnflanke einwirkende dynamische Kraft
$f_{\alpha}(\ell, x_n)$	Verteilung der Flankenkraft über die Berührungslinie
M_0	Drehmoment
r_g	Radius des Grundkreises
r_o	Wälzkreis-Radius
r_k	Kopfkreis-Radius
Z_z	Zähnezahl des Ritzels
Z_r	Zähnezahl des Rades
b	Zahnbreite
α	Eingriffswinkel
α_k	Eingriffswinkel am Kopfkreis
β_o	Schrägungswinkel
ℓ	Bestimmte Stelle auf der Berührungslinie
y	Stelle am Zahnfuß, in bestimmter Entfernung von der Seitenfläche
t_e	Eingriffsteilung

V	Umfangsgeschwindigkeit
n	Drehzahl U/min
f_e	nominale Eigenfrequenz der Umfangsschwingungen des Zahnräderpaars
f_{we}	tatsächliche Eigenfrequenz d.h. Resonanzfrequenz
f_z	Eingriffsfrequenz $n \cdot Z/60$
$S(x)$	Einfluß-Koeffizient für Zahnfußbeanspruchung, definiert als (Zahnfußbeanspruchung):(Flankenkraft) (siehe Schrifttum [27-28])
$S_k(y, l, t_n)$	Einfluß-Koeffizient für Zahnfußbeanspruchung bei Schrägverzahnung
t_i	Zeitdauer des Einzeleingriffs
t_{ii}	Zeitdauer des Doppeleingriffs
T_z	Eingriffsumlaufzeit $1/f_z$
T_n	Umdrehungszeit eines Zahnrades
τ	Berührungszeit eines Zahnes
σ_d	dynamische Zahnfußbeanspruchung an einem Zahn
$\sigma_{s, max}$	statischer Höchstwert der Zahnfußbeanspruchung an einem Zahn
σ_H	Flanken-anpreßdruck
σ_{up}	Dauerfestigkeitsgrenze der Zahnfußfestigkeit
ε	theoretischer oder geometrischer Überdeckungsgrad (Profilüberdeckungsgrad)
ε_{sp}	theoretischer oder geometrischer Sprungüberdeckungsgrad
ε_d	dynamischer Überdeckungsgrad
κ	Spannungssignal

Indizes

i	für Antriebszahnrad
ii	für Abtriebszahnrad
i od. j	Zahn i oder j
(i)	Zähnepaar (i)
i od. ii	Einzeleingriff oder Doppeleingriff
d	dynamischer Wert
s	statischer Wert
max	maximaler Wert
⊙	am anlaufenden Doppeleingriff
⊗	am auslaufenden Doppeleingriff

A n m e r k u n g

In dieser Abhandlung werden die Umfangsschwingungen dahin definiert, daß zwischen dem Drehweg des Abtriebszahnrades und dem des Antriebszahnrades auf der Eingriffslinie eine Differenz besteht.

1. Einleitung

Im modernen Getriebebau wird in zunehmendem Maß ein Betrieb bei sehr hohen Geschwindigkeiten gefordert, damit die Getriebe trotz hoher Übertragungsleistung klein gehalten, und Gas- oder Dampfturbinen als Antrieb für Maschinen weiter verwendet werden können. Für den Entwurf und die Herstellung von Hochgeschwindigkeitsgetrieben müssen das Laufverhalten der Getriebe, besonders ihr Schwingungsverhalten im Betrieb, und die dynamische Belastung am Zahnrad bekannt sein.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Umfangsschwingungen von Zahnräderpaaren als Hauptursache für die dynamische Belastung, die die Zähne zu tragen haben, und die entstehenden Geräusche, sind unter normalen Geschwindigkeitsbedingungen bereits sehr viele gemacht worden [1-15]. In neuerer Zeit sind eingehende theoretische Betrachtungen über die Umfangsschwingungen nach Untersuchungen über die Geräuschabstrahlung von Zahnradgetrieben veröffentlicht worden [18-26]. Aber über Hochgeschwindigkeitsgetriebe liegen bis jetzt sehr wenige Untersuchungen vor. Besonders die Untersuchungen über die dynamische Belastung an den Zähnen der Getriebe auf dem Gebiet sehr hoher Geschwindigkeiten, sind noch nicht experimentell bestätigt. Die bisherigen experimentellen Untersuchungen bei sogenannten Hochgeschwindigkeitsgetrieben über die dynamische Belastung sind bei Geschwindigkeiten von bis zu 14300 U/min (Umfangsgeschwindigkeit auf dem Wälzkreis = 101 m/sek) durchgeführt worden [17]. Doch sind die Messungsergebnisse ungenügend und die Daten der Prüfzahnräder und des Prüfstandes und sonstige Betriebsbedingungen sind dabei kaum berücksichtigt worden. Deshalb müssen die Unter-

suchungen als mangelhaft bezeichnet werden. Auch theoretische Untersuchungen sind angestellt worden. Fast alle Ergebnisse derselben zeigen, daß bei Betrieb oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit des Zahnradpaar-Systems die Umfangsschwingungen mit zunehmender Geschwindigkeit geringer werden. Viele der theoretischen Untersuchungen sind aber unter der Voraussetzung durchgeführt worden, daß die an den Zahnflanken wirkende Kraft bei jedem Zahn ganz gleich ist, d.h. bei Einführung von Zahnfehlern in die Untersuchung wurden diese für jeden Zahn als ganz gleich angenommen. Es ist also problematisch, diese Ergebnisse ohne genügende experimentelle Bestätigung beim Entwurf eines Zahnradpaares für sehr hohe Geschwindigkeit zu verwerten, besonders wenn jeder Zahn verschiedene Zahnfehler aufweist.

Im vorliegenden Fall wurde ein Hochgeschwindigkeits-Zahnradprüfstand entworfen, der bis zu 32000 U/min (Umfangsgeschwindigkeit auf dem Wälzkreis des Prüfzahnrades=167 m/sek) betrieben werden konnte, und mit diesem wurde das dynamische Verhalten von Hochgeschwindigkeitsgetrieben untersucht, und daneben wurden theoretische Untersuchungen über die Umfangsschwingungen von Zahnradpaaren durchgeführt. Das Ziel der Untersuchungen war es, durch Messungen der dynamischen Beanspruchung am Zahnfuß und des Laufverhaltens der Zahnradgetriebe im Hochgeschwindigkeitsbereich, sowie durch theoretische Untersuchungen über die Umfangsschwingungen der Zahnradpaare, das dynamische Verhalten der Hochgeschwindigkeitsgetriebe zu klären und Grundlagen für den Bau von Hochgeschwindigkeitsgetrieben zu schaffen.

2. Prüfstand

2-1. Konstruktion

Bild 1 zeigt das Schema des Hochgeschwindigkeits-Zahnradprüfstandes, der zum Messen des Verhaltens der Zahnradpaare im Hochgeschwindigkeitsbetrieb verwendet wurde. Der Antrieb des Prüfstandes erfolgte durch Wechselstrommotor M (22kw-6p), und mittels V-Riemen V und zweistufigem Zahnradgetriebe A wurde die Antriebsgeschwindigkeit ca. 25,8 mal verstärkt. Die Drehzahl konnte zwischen 2780-11200 und 8200-32000 U/min durchlaufend variiert werden.

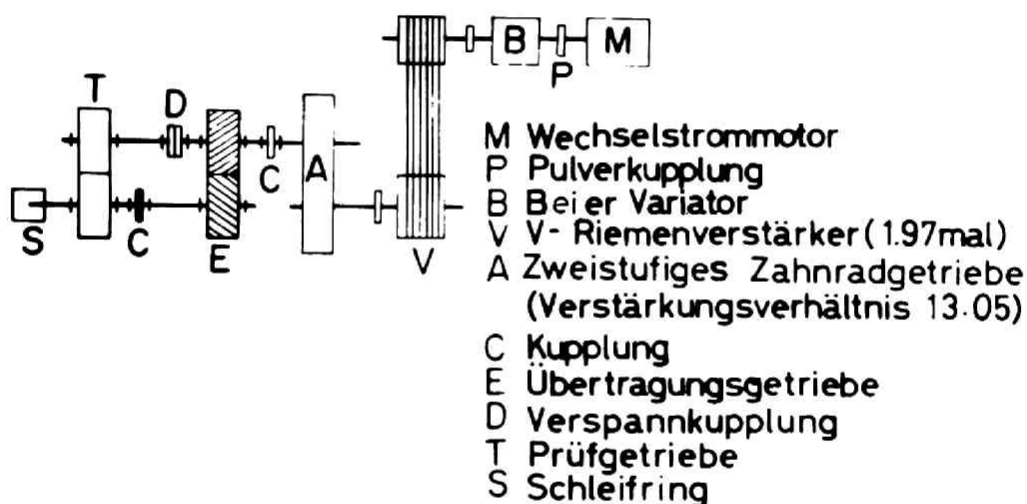


Bild 1. Schematische Darstellung des Hochgeschwindigkeits- Zahnradprüfstandes

Bild 2 zeigt den Plan des Prüfstandes. Der Prüfstand war vom Leistungskreisumlauf-(power circulating)-Typ und die Belastung wurde durch Verspannen der zahnradförmigen

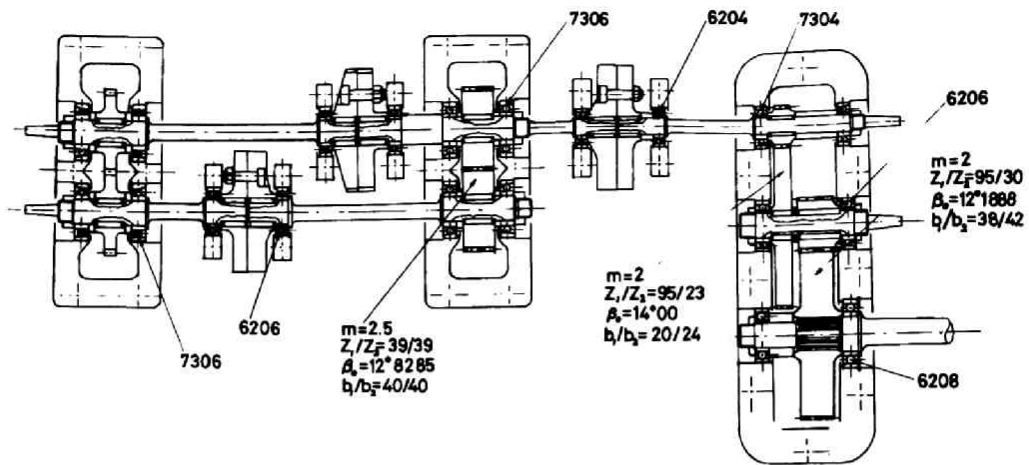
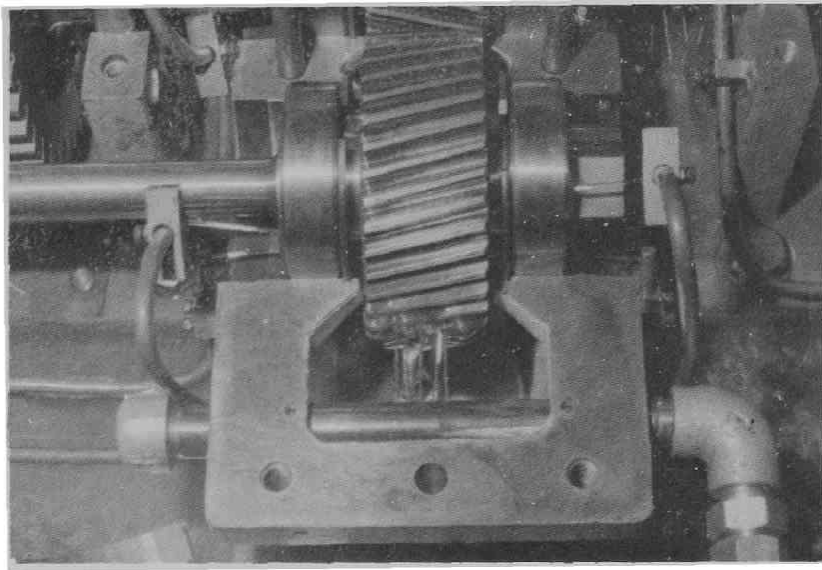
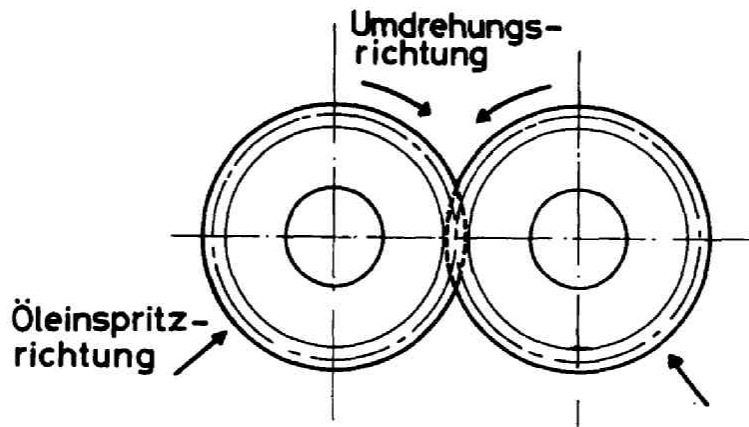


Bild 2. Plan des Hauptteils des Prüfstandes

Kupplung D erzeugt (maximales Drehmoment=3000 kp·cm). Der Achsabstand war 100,145 cm. Die Zahnräder des zwei-stufigen Zahnradgetriebes A und des Übertragungsgetriebes E wiesen einsatzgehärtete, geschliffene Schrägverzahnung auf. Die Fertigungsgenauigkeit der Zahnräder, mit Ausnahme des Rades der ersten Stufe des zweistufigen Zahnradgetriebes A, betrug JIS 0 Grad. Alle Lager, die im Prüfstand verwendet wurden, waren Wälzlager wie bei Gasturbinen. Bild 3 zeigt die Schmierung. Der Typ der Schmierungssystem war Düsen Schmierung, und die Schmierstoffmenge war 35 l/min. Die beiden Kupplungen D,C auf den Torsionswellen wirkten als Schwungräder und somit als Glättungs drosseln für die Übertragungsgetriebe. Der Aufbau des Prüfstandes ist in Bild 4 gezeigt.



(a) Aussehen des Schmierzustandes



(b) Öleinspritzrichtung zu den Zahnrädern

Bild 3. Schmierung

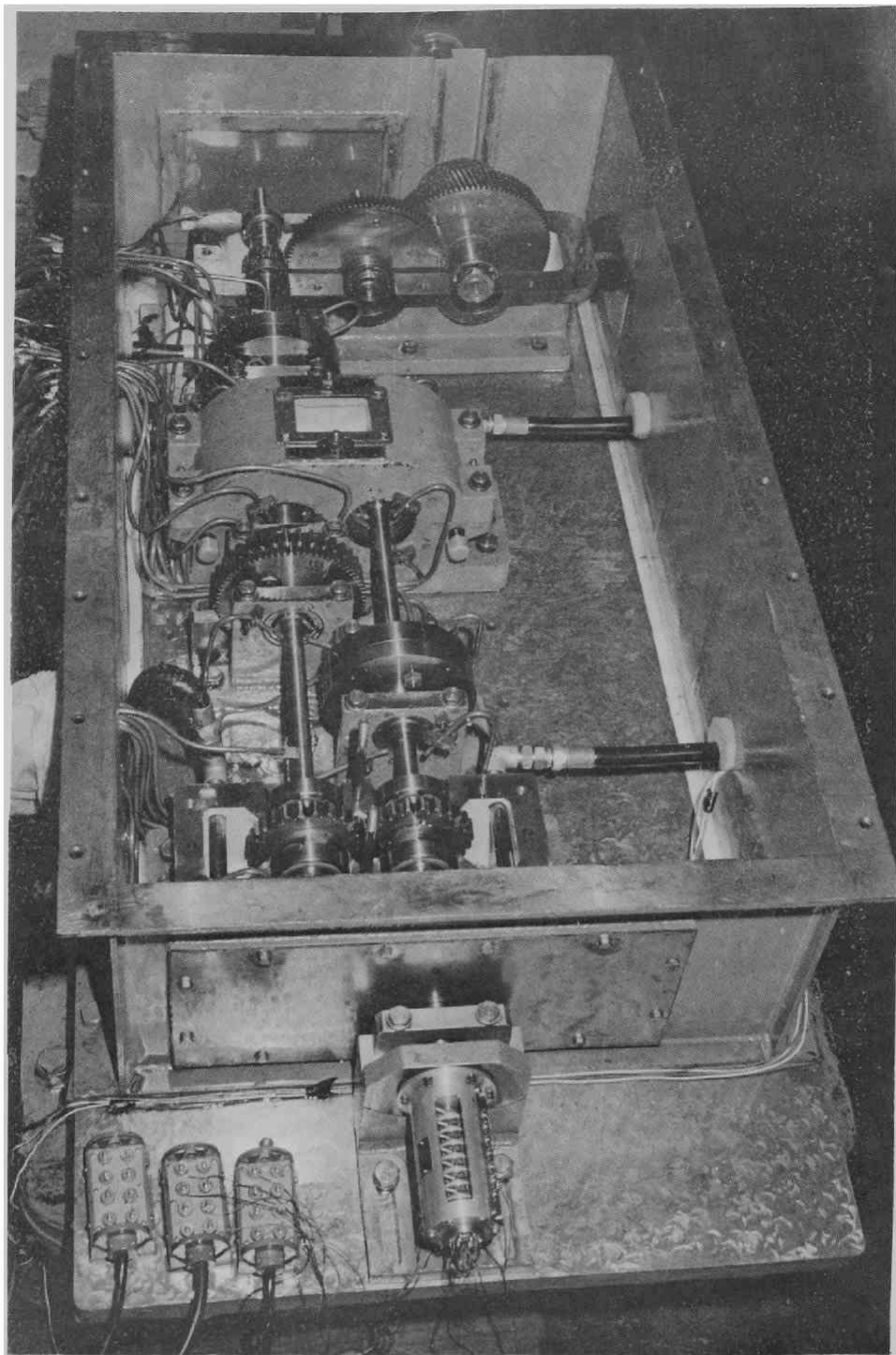


Bild 4. Prüfstand, Schleifring und dessen Lagerung

2-2. Betriebseigenschaften

2-2-1. Verlustleistung

Bilder 5,6,7 zeigen die erforderlichen Stromstärken für den Antriebsmotor bei einer Spannung von 220 Volt zur Angabe der Verlustleistung des Prüfstandes. Man kann für die Verlustleistung drei Ursachen verantwortlich machen:

- 1) Verlustleistung durch Reibung der Zahnflanken und der Lager; dieser Anteil an der Verlustleistung ändert sich je nach der Übertragungsleistung.
- 2) Verlustleistung durch Umwirbelung (churning) und Flüssigkeitsreibung des Schmierstoffes; dieser Anteil an der Verlustleistung wird in großem Maß durch die Ölzähigkeit, Schmierungsart und Drehzahl beeinflusst.
- 3) Verlustleistung durch Luftreibung; dieser Anteil an der Verlustleistung wird durch die Anzahl und die Abmessungen der Drehkörper und das spezifische Gewicht der Luft (d.h. Dichte des Ölnebels in der Atmosphäre) stark beeinflusst.

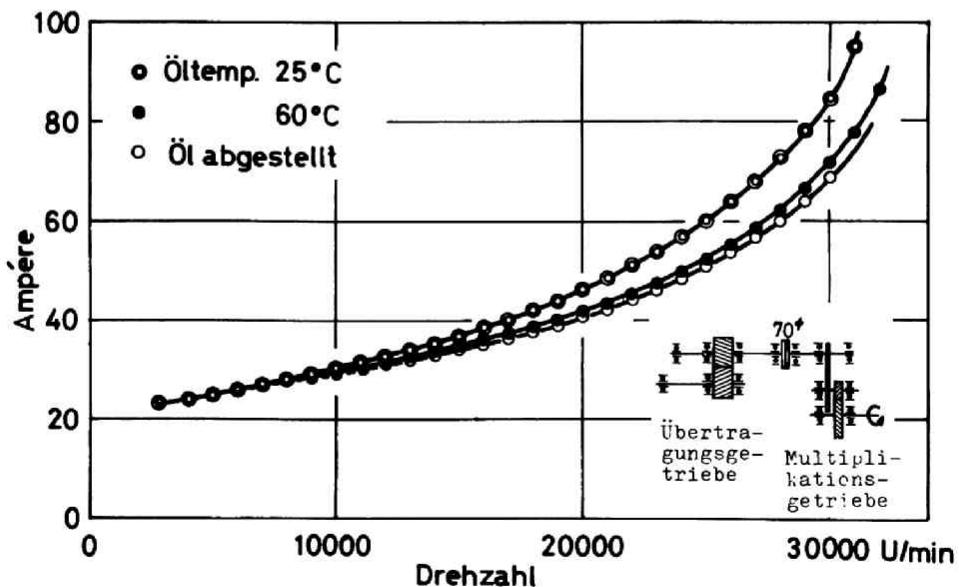


Bild 5. Einfluß der Öltemperatur auf die Verlustleistung und durch überflüssiges Öl verursachte Leistungsverlust im Prüfstand

Bild 5 zeigt die Änderung der Verlustleistung des Prüfstandes, einmal mit Änderung der Ölzähigkeit die Öltemperaturänderungen begleitet, und außerdem beim Abstellen der Ölzuführung. Die Messung brachte folgendes Ergebnis: Nach dem Abstellen der Ölzuführung verringerte sich mit dem Schwächerwerden der Ölwirbel in den Lagern und zwischen den Zahnrädern kurzzeitig die Stromstärke für den Antriebsmotor, und als die metallische Berührung in den Lagern oder zwischen den Zahnrädern einsetzte, stieg sie wieder an. Und der Minimalwert nach dem Abstellen der Ölzuführung wurde als die erforderliche Stromstärke für ölumwirbelungsfreien Betrieb angenommen. Damit wurde die Differenz zwischen der Kurve für ölumwirbelungsfreien Betrieb und den beiden anderen Kurven als durch die Ölumwirbelung verursachte Verlustleistung ermittelt. Bei dieser Messung war das Prüfgetriebe nicht mit einbezogen. Man sieht, daß die Verlustleistung nach einem Exponentialgesetz in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit steigt, und bei Hochgeschwindigkeitsbetrieb die Änderung der Ölzähigkeit mit der Temperatur auf die Verlustleistung der Getriebe einen sehr starken Einfluß ausübt, und der Ölumwirbelungsverlust ebenfalls sehr groß ist.

Bild 6 zeigt die Änderung der Verlustleistung bei Vergrößerung der Durchmesser der Schwungräder (Kupplungen) von 70^{*}mm auf 150^{*}mm. Bei dieser Messung wurde das Prüfgetriebe (Modul $m = 4$ mm, Zähnezahl $Z_1/Z_2 = 23/23$, Schrägungswinkel $\beta_s = 23,074^\circ$, Zahnbreite $b = 40,0$ mm) mit einsatzgehärteten, geschliffenen Zähnen und einer Qualität von JIS 0 Grad mit einbezogen. Das Getriebe lief im Leerlauf. Aus diesem Bild kann man ersehen, daß der Durchmesser des Schwungrades auch einen sehr großen Einfluß auf die Verlustleistung hat. Je höher die Laufgeschwindigkeit wird, desto weiter ist der Abstand der beiden Verlustleistungsgrößen. Als Beweis für

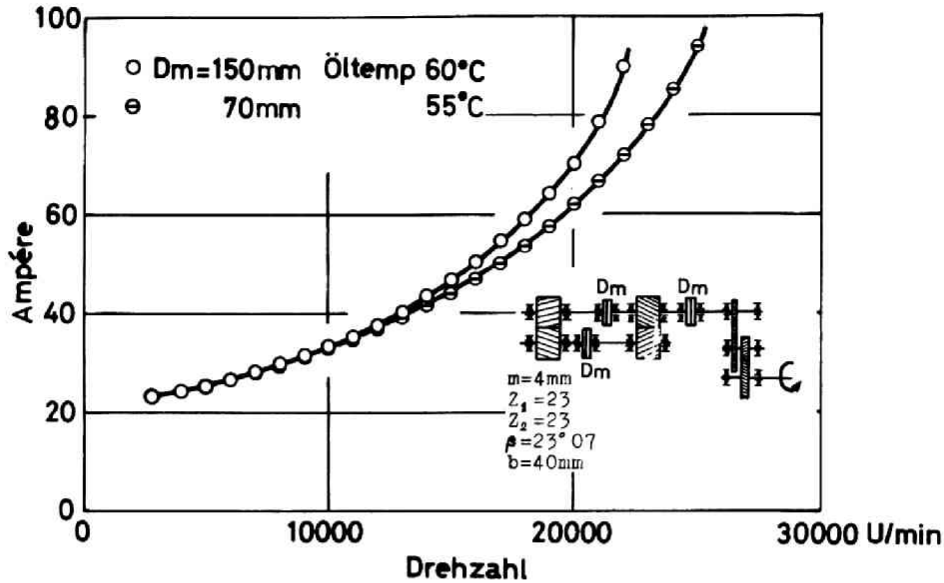


Bild 6. Einfluß der Anzahl und der Durchmesser der Drehkörper auf die Verlustleistung des Prüfstandes

den starken Leistungsverlust durch die Schwungräder wurde gefunden, daß bei Hochgeschwindigkeitsbetrieb bei 150mm -Schwungrädern die größte Erwärmung an der Peripherie der Schwungräder auftritt, nicht aber in den Lagern oder Zahnrädern. Aus den Kurven in Bild 5 und 6 ersieht man, welche Antriebsleistung notwendig ist, um ein Prüfzahnradpaar und zwei Kupplungen unter Hochgeschwindigkeit zu treiben. Im Falle des Antriebsmotors von 22 kW fiel also, durch die Vermehrung der Drehkörper, die maximale Drehzahl des Prüfstandes von 32000 U/min auf 24000 U/min .

Bild 7 zeigt den Einfluß des Kreisumlaufdrehmomentes des Prüfstandes auf die Verlustleistung. Wenn dieses zunimmt, steigt die Verlustleistung entsprechend.

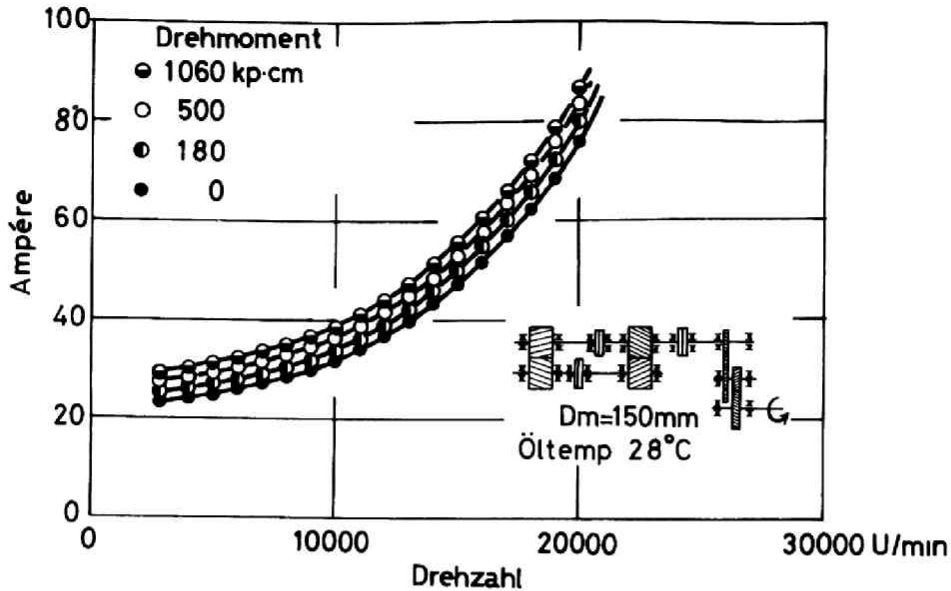


Bild 7. Einfluß der Kreisumlaufleistung auf die Verlustleistung des Prüfstandes

Diese Verlustleistungssteigerung verläuft fast linear mit der Übertragungsbelastung, d.h. die aus der Übertragungsbelastung resultierende Verlustleistung eines Zahnradpaares wird bei ziemlich hoher Geschwindigkeit im Vergleich zum Ölumwirbelungsverlust und Luftreibungsverlust sehr gering.

Nach den Bildern 5,6,7 kann man im allgemeinen die Ergebnisse für den Leistungsverlust eines Hochgeschwindigkeitsgetriebes wie folgt zusammenfassen:

- 1) Bei Hochgeschwindigkeitsgetrieben kann eine starke Verminderung des Wirkungsgrades der Leistungsübertragung auftreten, da die Verlustleistung nach einem Exponentialgesetz in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit zunimmt.
- 2) Verwendung von Ölen geringer Zähigkeit verringert die

Verlustleistung.

- 3) Durch eine Zunahme der Anzahl der Drehkörper und durch eine Vergrößerung der Drehkörperdurchmesser, steigt die Verlustleistung stark an.
- 4) Bei Hochgeschwindigkeitsbetrieb kann die Verlustleistung durch die Übertragungsbelastung, im Vergleich zum Ölumwirbelungsverlust und Luftreibungsverlust, verhältnismäßig klein gehalten werden.

2-2-2. Verschleiß der Zahnräder**

Da bei Hochgeschwindigkeitsgetrieben die Lastwechselzahl für einen Zahn jeweils kurzzeitig sehr groß wird, und eine vollkommene Schmierung der Zahnräder nicht leicht zu erzielen ist, bildet der Verschleiß der Zahnräder oft ein großes Problem. Die Untersuchungen ergaben, daß je nach

Tafel 1 Daten der Versuchszahnäder

Bezeichnung		Versuchsräd	
		Rad	Ritzel
Zähnezahl		25	25
Modul	mm	4	4
Eingriffswinkel	Grad	20°	20°
Normalverzahnung			
Teilkreis-Dmr.	mm	100	100
Kopfkreis-Dmr.	mm	108	108
Zahnbreite	mm	15	15
Normalflankenspiel	mm	0,1	
Werkstoff		SNCM 22	
Wärmebehandlung		einsatzgehärtet	
Fertigung		geschliffen	
Härte an der Zahnflanke		H _{RC} 59-62	

Ölsorte der Zahnverschleiß stark differenzierte, was zu großen Unterschieden in der dynamischen Belastung der Zahnäder und in den Schwingungen der Getriebe führte.

**Es gibt bereits einige Untersuchungen über Schmierung und Fressung bei Hochgeschwindigkeitsgetrieben [27-29].

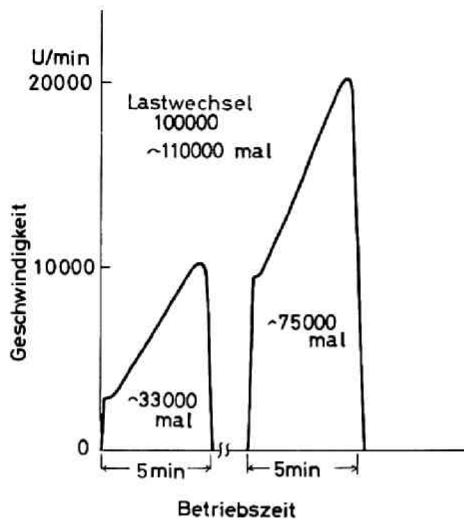


Bild 8. Betriebsbedingung
für die Messung
(einmaliger Betrieb)

Tafel 1 zeigt Abmessungen, Wärmebehandlung, Härte usw. des Prüfräderpaares. Jede einzelne Inbetriebnahme zur Messung erfolgte unter den Betriebsbedingungen, nach Bild dabei wurde der Prüfstand von 2780 auf 1000 U/min fortlaufend hochgezogen, dann, nach einer Unterbrechung (der Bayer-Variator, B im Bild 1, erlaubte keine direkte Durchschaltung), von 8200

auf 20000 U/min weiter durchgeschaltet. Das Prüfgetriebe hat sich pro Messung 100000 bis 110000 Mal gedreht.

Die drei Arten des Flankenverschleißes, die während der Untersuchung auftraten, waren wie folgt:

1) Normalverschleiß

Normalverschleiß bedeutet einen gewissen Flankenzustand nach einer bestimmten Betriebszeit. Bild 9 zeigt das Aussehen der Zahnflanken und die Änderung der Flankenformen nach 6maligem Betrieb, d.h. 1 Mal unter 1500 kp·cm, 4 Mal unter 1100 kp·cm, 1 Mal unter 700 kp·cm. Der Schmierstoff war Turbinenöl #150 bei 28-32°C. Nach Beendigung des Versuches konnte man fast über die ganzen Flanken Schleifspuren beobachten, deshalb wurde der Schmierzustand als sehr gut betrachtet. Aber die Flanken waren außerhalb des Nahbereiches des Wälzpunktes etwas verschlissen (1-4µm) und entlang der Berührungslinie am Eingriffsbeginn, nämlich

am Zahnfuß des Antriebszahnrades, sah man eine klare Schramme. Der Durchschnittsradius der Zahnkopfkante des Abtriebszahnrades hatte sich von 0,4 mm auf 0,7 mm geändert. Am Zahnfuß des Abtriebszahnrades wurde auch eine Schramme ermittelt, aber sie war um einiges schwächer als die beim Antriebszahnrad. Daraus war ersichtlich, daß am sog. Eingriff der Zahnkopfkante, besonders am Eingriffsbeginn, eine starke metallische Berührung erfolgt war.

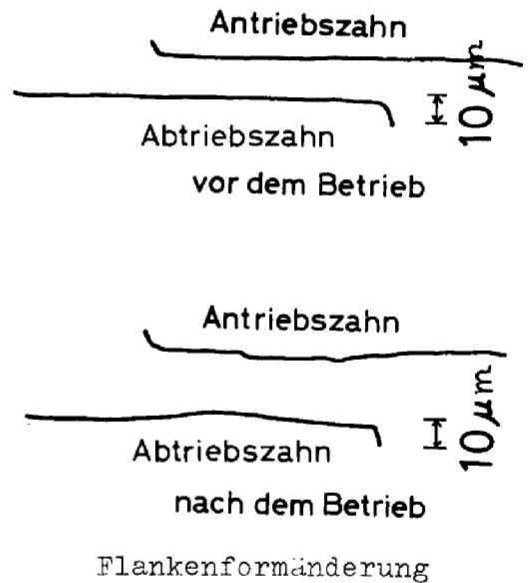
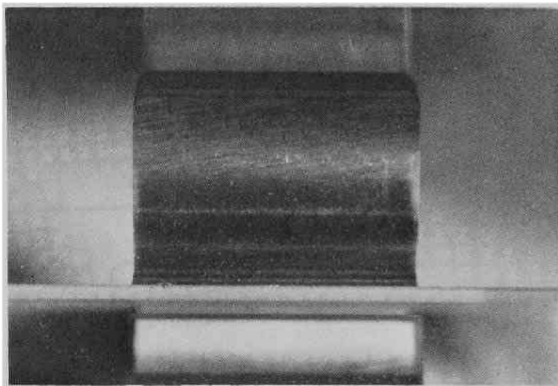


Bild 9. Flankenzustand bei Normalverschleiß

- 2) Starker Verschleiß (wenn immer dieselben Zähne miteinander in Eingriff kamen.)

Bild 10 zeigt das Aussehen der Zahnflanken und die Änderung der Flankenformen nach einmaligem Betrieb unter 700 kp·cm nachfolgendem einmaligem Betrieb unter 1100 kp·cm, mit Turbinenöl #90 als Schmierstoff. Die Schmierungsart war gleich wie im Fall 1), aber mit Turbinenöl #90 verschlissen sich die Zähne an den Flanken außerhalb des Nahbereichs des Wälzpunktes bereits nach kurzem Betrieb außerordentlich. In dem Fall, wo sich immer die gleichen Zahnflanken berührten (d.h. bei Übersetzung 1,0), hat sich der Verschleiß an jeder Zahnflanke fast gleichartig entwickelt. Deshalb haben alle verschlissenen Zähne fast dieselbe Zahnform. Das Aussehen der verschlissenen Flanken deutet nicht unbedingt auf Fressung hin. Tatsächlich aber scheint der Verschleiß hier doch eine Art Fressung zu sein.

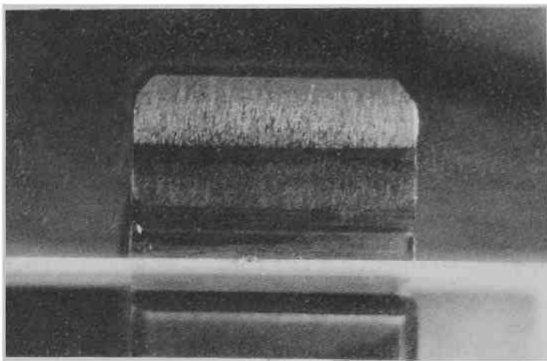
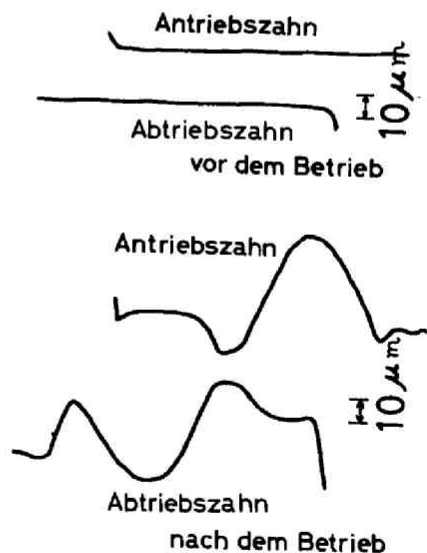
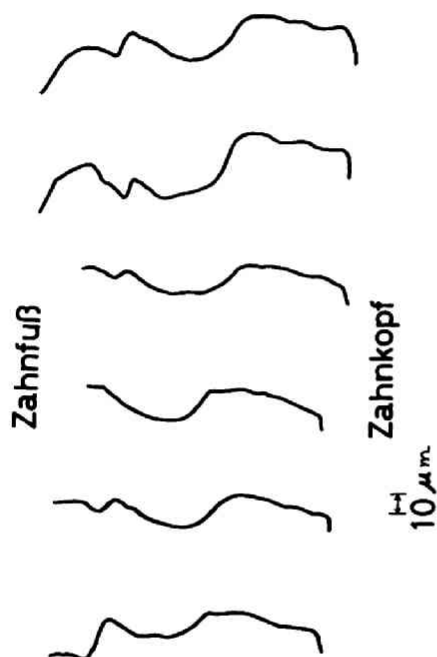


Bild 10. Flankenzustand bei starkem Verschleiß



Flankenformänderung bei gleichbleibenden Eingriffsflanken

- 3) Starker Verschleiß (wenn nicht immer dieselben Zähne miteinander in Eingriff kamen.)



Die Räder des verschlissenen Zahnradpaars, deren Flankenformen in Bild 10 gezeigt werden, wurden nunmehr so angeordnet, daß andere Zähne in Eingriff kamen. Jetzt nahmen die Zähne, die vorher fast die gleiche Flankenform aufwiesen, nach einmaligem Betrieb unter 700 kp·cm und einmaligem Betrieb unter 1100 kp·cm, mit Turbinenöl #90, verschiedene Flankenformen an, Bild 11.

Bild 11. Verschiedene Flankenformen beim verschlissenen Zahnrad

3. Theoretische Grundlagen zur Klärung des Phänomens der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars

3-1. Theoretische Untersuchungen über die Umfangsschwingungen

3-1-1. Gleichungen für die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars

Über die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars liegen bereits zahlreiche Untersuchungen vor, siehe [8],[9],[10]. Unter Vernachlässigung der Torsions- und Biegefederhärte der Achse, bekommt man folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} + D(t, x, e_{(i)}) \dot{x} + R(t, x, e_{(i)}) x &= W + F(e_{(i)}, R_{(i)}) \\ m \ddot{x} &= W \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ohne Flankenabtrennung} \\ \text{während der Flankenabtrennung} \end{array} \quad ** \quad (1)$$

dabei wird die Dämpfung $D(t, x, e_{(i)})$ in erster Näherung als $2\sqrt{m \cdot R(t, x, e_{(i)})}$ angenommen. Während sich das Zahnradpaar (i) im Eingriff befindet, ist der zeitliche Verlauf der Gesamtzahnfederhärte $R(t, x, e_{(i)})$ und der durch die Fehler des Zahnrades erzwungenen Kraft $F(e_{(i)}, R_{(i)})$:

$$R(t, x, e_{(i)}) = \begin{cases} \vdots & \text{(für das Zahnradpaar (i))} \\ R_{(i-1)} + R_{(i)} & \text{während des anlaufenden} \\ & \text{Doppeleingriffes} \\ R_{(i)} & \text{während des Einzeleingriffes} \\ R_{(i)} + R_{(i+1)} & \text{während des auslaufenden} \\ \vdots & \text{Doppeleingriffes} \end{cases}$$

bezw.

$$F(e_{(i)}, R_{(i)}) = \begin{cases} \cdot & \\ e_{(i-1)} \cdot R_{(i-1)} + e_{(i)} \cdot R_{(i)} & \text{während des anlaufenden} \\ & \text{Doppeleingriffes} \\ e_{(i)} \cdot R_{(i)} & \text{während des Einzeleingriffes} \\ e_{(i)} \cdot R_{(i)} + e_{(i+1)} \cdot R_{(i+1)} & \text{während des auslaufenden} \\ & \text{Doppeleingriffes} \end{cases}$$

**Buchstabenbezeichnungen, siehe Seite iv, v

Wenn die Zahnfehler bei jedem Zahn verschieden sind, wächst (i) im allgemeinen mit dem Fortlaufen des Eingriffes von 1 bis auf das kleinste gemeinsame Vielfache der Zähnezahl von Rad und Ritzel, dann fällt es zurück auf 1 und wächst erneut an, usw. Der Zeitpunkt, zu dem der Eingriff vom Doppel- zum Einzeleingriff oder vom Einzel- zum Doppel- eingriff übergeht, wird in starkem Maß durch die Zahnfehler und die Zahnverformungen beeinflusst. Bild 12 zeigt den Zeitpunkt des Übergangs in seiner Beziehung zum Zahnfehler und X . Der Zeitpunkt liegt da, wo die Höhe der Kurve von X mit der Höhe der Kurve des angenommenen, durch die Zahnverformung entstandenen, Zahnkopffehlers übereinstimmt.

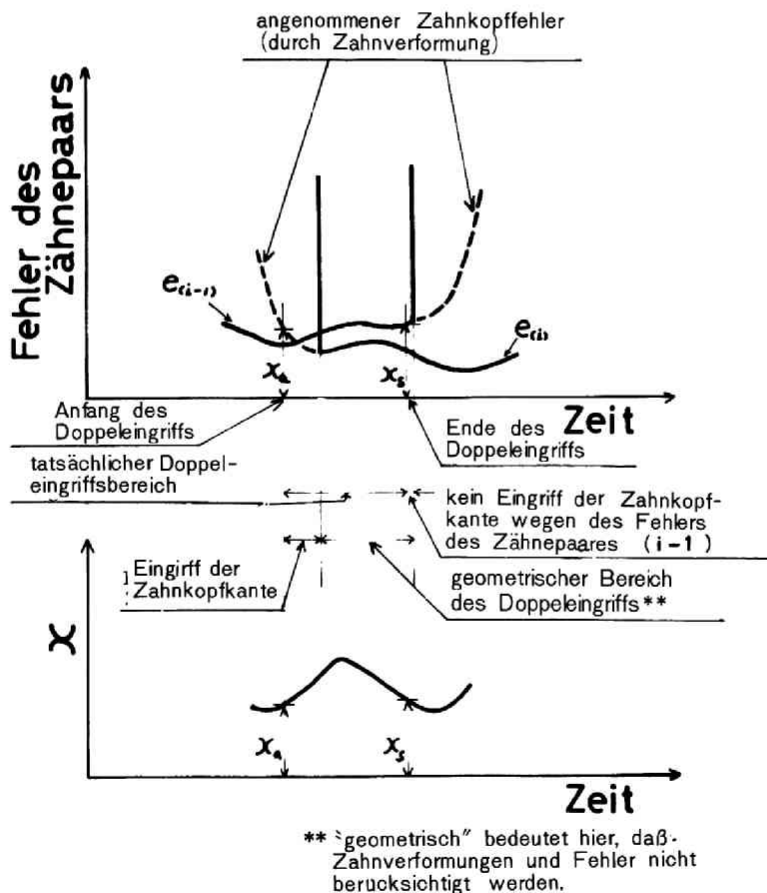


Bild 12. Beziehung zwischen dem Anfang bzw. Ende des Doppel- eingriffes und dem Zahnfehler und X

Der Zeitraum zwischen dem tatsächlichen Anfang (oder Schluß) des Doppeleingriffes und dem geometrischen Anfang (oder Schluß) des Doppeleingriffes entspricht der Eingriffszeit der Zahnkopfkante. In allgemeinen ist die Bedingung für die Berührung des Zahnepaars (i)

$$x > e_{\alpha i} \quad (2)$$

3-1-2. Stabilität der Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaa

Der zeitliche Verlauf von $k(x, x, e_{\alpha i})$, in erster Näherung, ist in Bild 13 gezeigt, als eine Rechteckfunktion mit der Periode T_z . Also stimmt die homogene Gleichung der Gleichung (1), $m\ddot{x} + 2\sqrt{m \cdot k(x)} \cdot \dot{x} + k(x) \cdot x = 0$, mit der vom Hill-Meißnerschen Typ für heteroparametrisch erregte Schwingungen überein, und es ist bekannt, daß die Unstabilitätsbereiche der Gleichung (der divergente Bereich) um die Punkte $f_z/f_e = 1, 1/2, 1/3$, liegen, wenn der Dämpfungsfaktor δ der Gleichung genügend klein ist, dabei ist f_z die Frequenz von $k(x)$ und f_e ist die Eigenfrequenz der homogenen Gleichung. Der Dämpfungsfaktor wurde durch den zeitlichen Verlauf der gemessenen

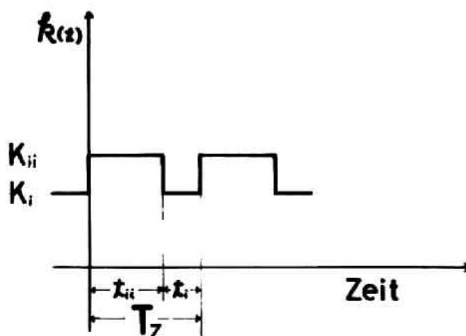
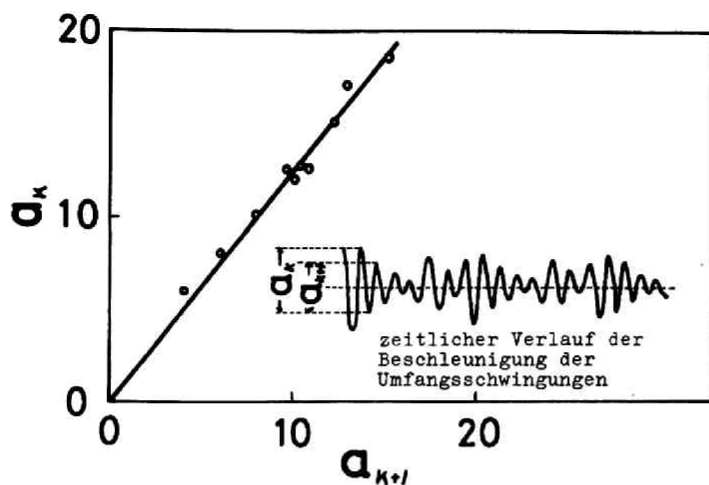


Bild 13. Erste Näherung des zeitlichen Verlaufs der Gesamtzahnfederhärte $k(x, x, e_{\alpha i})$

Beschleunigung der Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares ermittelt, Bild 14. Bei Stahlzahnradpaaren mit Tropfenschmierung liegt er um 0,07. Bild 15 zeigt das berechnete Schema für die Stabilität der Umfangs-

schwingungen des Zahnräderpaar-Systems. Die Berechnung wurde für $\zeta = 0$ und für $\zeta = 0,07$ durchgeführt, siehe Anlage I. Auf der Abszisse ist das Quadrat des Verhältnisses zwischen der nominellen Eigenfrequenz f_e der Gleichung (1) und der Eingriffsfrequenz f_z aufgetragen. Die nominelle Eigenfrequenz der Gleichung (1) ist die Eigenfrequenz von $m\ddot{x} + 2\zeta\sqrt{m \cdot \overline{K(\alpha, x, e_{\omega})}} \dot{x} + \overline{K(\alpha, x, e_{\omega})}x = 0$, wobei das Zeichen " $\overline{\quad}$ " einen zeitlichen Durchschnittswert darstellt. Die Ordinate gibt $(f_e/f_z)^2 \cdot (K_{ii} - K_i)/K$ wieder, wobei K_{ii} : durchschnittliche Zahnfederhärte im Doppeleingriff, K_i : durchschnittliche Zahnfederhärte im Einzeleingriff, K : durchschnittliche Gesamtzahnfederhärte: $\frac{1}{T_z} \int_0^{T_z} K(\alpha, x, e_{\omega}) \cdot dt$ ungefähr $(2 - \varepsilon) \cdot K_i + (\varepsilon - 1) \cdot K_{ii}$. Bei Steigerung der Betriebsgeschwindigkeit der Zahnräder bewegt sich ein auf der vom Nullpunkt abgehenden Linie angenommener Punkt dem Nullpunkt zu. Der Nullpunkt entspricht einer Betriebsgeschwindigkeit unendlich. Die Steigung der Linie ist $(K_{ii} - K_i)/K$ und bei normaler Geradverzahnung liegt sie zwischen 0,4 und 0,6 (Sie wird geringer mit zunehmendem Überdeckungsgrad.). Bei Schrägverzahnung ist sie noch geringer. Aus dem Bild ersieht man, daß die Linie den Unstabilitätsbereich bei $\zeta = 0,07$ nicht erreicht, d.h. die homogene Gleichung $m\ddot{x} + 2\zeta\sqrt{m \cdot \overline{K(\alpha, x, e_{\omega})}} \dot{x} + \overline{K(\alpha, x, e_{\omega})}x = 0$ wird für alle Betriebsgeschwindigkeiten zu Null. Und bei konstanter Betriebsgeschwindigkeit erscheinen die Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares in einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung (1), wobei die Lösung auch bei Dauerzustand nicht verschwindet und nicht durch die Anfangsbedingungen der Schwingungen beeinflusst wird.



$\zeta =$

$$\frac{\ln(a_k/a_{k+1})}{\sqrt{\pi^2 + \{\ln(a_k/a_{k+1})\}^2}}$$

Bild 14. Bestimmung des Dämpfungsfaktors ζ

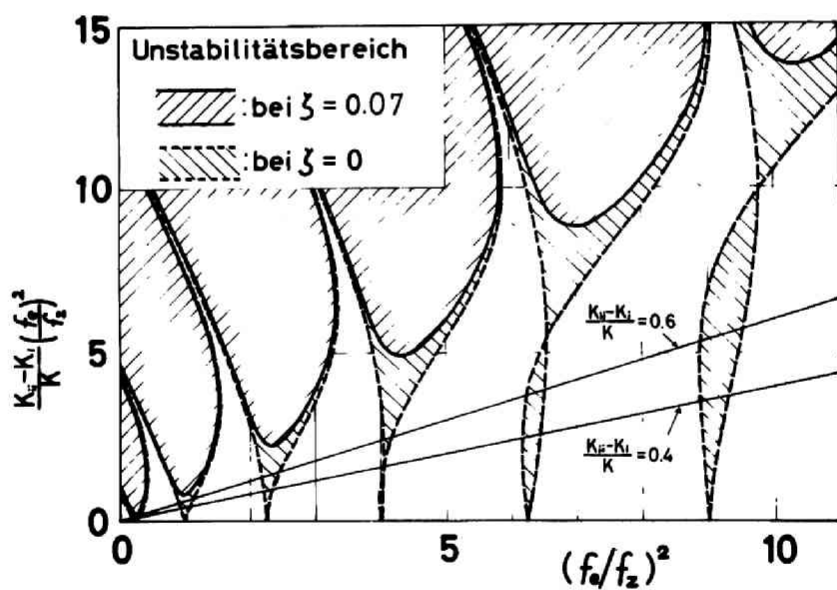


Bild 15. Stabilitätsbereich der Umfangsschwingungen des Zahnradpaars (für $\varepsilon = 1,7$)

3-1-3. Grundsätzliche Eigenschaften der Lösung der erzwungenen Gleichung für die Umfangsschwingungen

Um den Einfluß der Frequenzkomponenten der Gesamtzahnfederhärte $k(t, x, e_m)$ in ihrem zeitlichen Verlauf auf die Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaars zu klären, wurde der Vorgang unter Verwendung der Mathieuschen Gleichung unter Einbeziehung eines Dämpfungsgliedes

$$m \cdot \ddot{x} + 2\zeta \sqrt{m \cdot K \cdot (1 + a \cdot \sin 2\pi f \cdot t)} \dot{x} + K \cdot (1 + a \sin 2\pi f \cdot t) x = 0 \quad (3)$$

untersucht. Bild 16 gibt das Ergebnis. Die Ordinate zeigt das Verhältnis zwischen x und dem $x = w/(K(1-a))$ bei Wechselfrequenz $f=0$ der Federhärte. Die Abszisse zeigt die Wechselfrequenz der Federhärte, im Zusammenwirken mit der Eigenfrequenz $f_e = \sqrt{K/m}/2\pi$ der Gleichung (3), als dimensionslose Größe. Aus dem Bild ersieht man, daß die Lösung der Gleichung (3) bei dem verhältnismäßig großen Dämpfungsfaktor $\zeta=0,07$, wie er den Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaars aus Stahl entspricht, keine klare Spitze um $f/f_e=1/2, 1/3, \dots$ aufweist. Und ein Resonanzzustand ist nur um $f/f_e=1$ zu beobachten. Bei den Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaars wird die Zahnfederhärte im Augenblick der Zahnflankenabtrennung, bei $x < 0$, zu Null. Wenn während des Zeitraums $x < 0$ die Bedingung $K=0$ in die Gleichung eingeführt würde, wiese

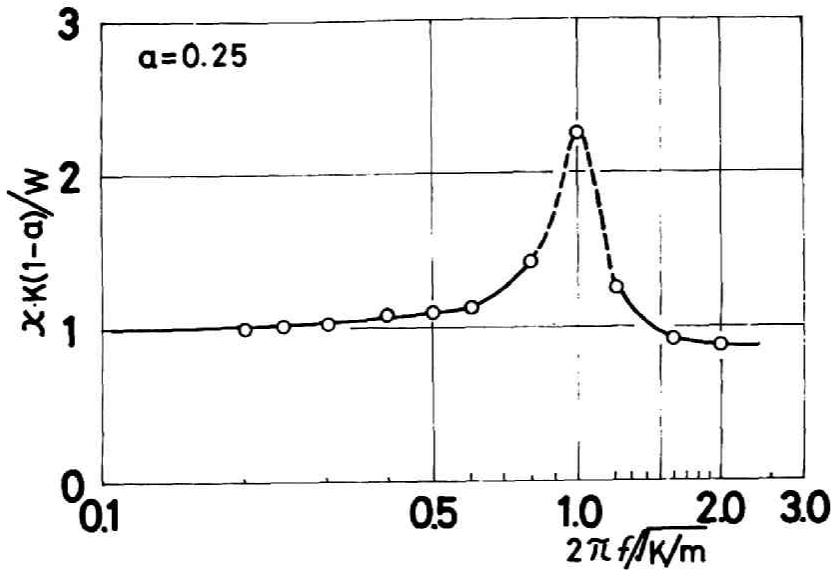


Bild 16. Empfindlichkeitskurve der Matieuschen Gleichung mit Dämpfungsglied ($\zeta=0,07$)

die Lösung auch nur einen Resonanzpunkt auf, und zwar etwas vor der Stelle von $2 \cdot \pi \cdot f / \sqrt{K/m} = 1$. Damit ist erwiesen, daß der Resonanzzustand der Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaares, bedingt durch den zeitlichen Wechsel der Zahnfederhärte $K(t, x, e_{\omega})$, nur da auftritt, wo eine große Frequenzkomponente von $K(t, x, e_{\omega})$ mit der Eigenfrequenz der Umfangsschwingungen übereinstimmt.

Bild 17 zeigt ein Rechenbeispiel, wie die Frequenzkomponente der durch Zahnradfehler erzwungenen Störfunktion $F(e_{\omega}, K_{\omega})$ die Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaares beeinflußt. Bei der Berechnung wurde die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} + 2\sqrt{m \cdot k(x)} \dot{x} + k(x) \cdot x &= W + A \cdot \sin 2\pi f_b \cdot t \\ &\text{ohne Flankenabtrennung} \\ m \ddot{x} &= W + A \cdot \sin 2\pi f_b \cdot t \quad \text{während der Flankenabtrennung} \end{aligned} \right\} (4)$$

angewendet, wobei $A \cdot \sin 2\pi f_b \cdot t$ eine Frequenzkomponente von $F(e_{\omega}, k_{\omega})$ darstellt, und es wurde der zeitliche Verlauf der Zahnfederhärte $k(x)$ wie in Bild 13 angenommen. Bild 18 zeigt das Schema des Berechnungsschaltbildes des Analog-Computers und das hier verwendete Prinzip zur Erzeugung der Rechteckfunktion. Wenn die Zahnflankenabtrennung berücksichtigt wird, weist die heteroparametrisch erregte Gleichung für die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars nur einen Resonanzpunkt auf, wie bei erzwungenen Schwingungen mit konstanter Federhärte. Der Resonanzpunkt der Umfangsschwingungen mit der erzwungenen Komponente $A \cdot \sin 2\pi f_b \cdot t$ ist etwa bei $f_b/f_e = 1$, aber er kann sich

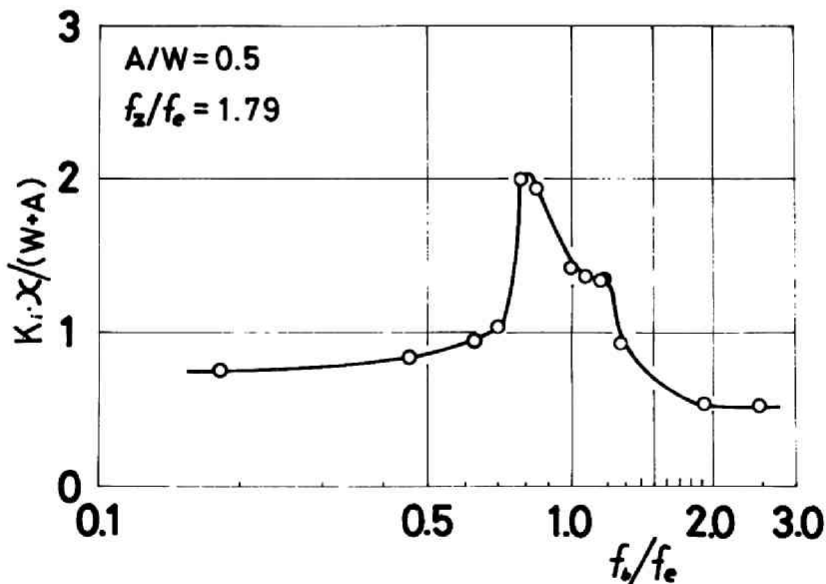
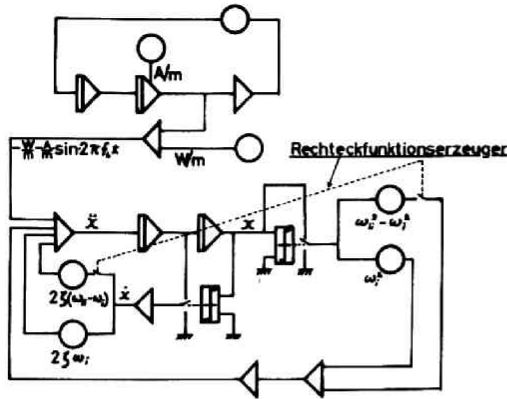
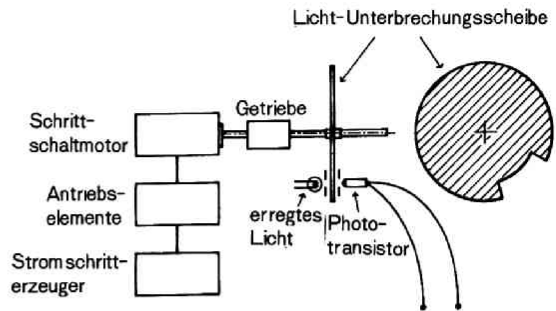


Bild 17. Einfluß der Frequenzkomponenten der durch die Zahnradfehler erzwungenen Kraft $F(e_{\omega}, k_{\omega})$ auf die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars



(a) Berechnungsschaltbild des Analog-Computer



(b) Schema der Erzeugung der Rechteckfunktion: periodisches Absperrelement für den Strom

Bild 18. Berechnungsmethode der Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaars mit Analog-Computer

mit einer Änderung der Werte von f_z / f_e und A / W weitgehend ändern. Wenn übrigens die Berechnung ohne Berücksichtigung der Zahnflankenabtrennung durchgeführt wird, tritt auch bei verhältnismäßig großem Dämpfungsfaktor eine weitere starke Spitze um $f_z / f_e \stackrel{\text{unter } f_z/f_e \rightarrow 1}{=} 2$ auf. Aber diese Resonanz hat keine Beziehung zu den Umfangsschwingungen des Zahnräderpaars, da in der Praxis bei dem Zahnräderpaar eine Flankenabtrennung möglich ist. Damit war es augenscheinlich, daß ein Resonanzzustand der Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaars, erzwungen durch die Störfunktion $F(e\omega, R\omega)$, nur auftritt, wo eine Frequenzkomponente von $F(e\omega, R\omega)$ mit der Eigenfrequenz der Umfangsschwingungen übereinstimmt und stark genug ist. Dieses Ergebnis zeigt auch, daß der Einfluß der Drehmomentänderungen auf die Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaars

leicht zu ermitteln ist, so lange die Frequenz der Drehmomentänderungen kleiner ist als etwa die Hälfte der nominellen Eigenfrequenz f_e . Deshalb kann bei der Errechnung der Umfangsschwingungen oder der dynamischen Belastung das sich langsam ändernde Drehmoment wie eine Konstante von der Größe des Drehmoments im Augenblick der Berechnung behandelt werden.

Um die nachfolgende Erklärung zu vereinfachen, setzt man nun voraus, daß während des Betriebs keine Zahnflankenabtrennung stattfindet. Die Gleichung (1) hat zwei Glieder $k(t, x, e_{(t)})$ und $F(e_{(t)}, k_{(t)})$, die die Umfangsschwingungen der Zahnradpaare verursachen. Der zeitliche Verlauf der Gesamtzahnfederhärte $k(t, x, e_{(t)})$ und des erzwungenen Gliedes $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ haben im allgemeinen eine Periode gemäß dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zähnezahls von Rad und Ritzel. Bei einem Zahnradpaar, dessen Zähnepaare nach je p aufeinanderfolgenden Eingriffen die gleichen Fehler aufweisen, haben $k(t, x, e_{(t)})$ und $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ einen zeitlichen Verlauf mit einer Periode von p/f_z . Deshalb sind die Frequenzen, die $k(t, x, e_{(t)})$ und $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ aufbauen können,

$$\frac{1}{p} f_z, \frac{2}{p} f_z, \frac{3}{p} f_z, \dots$$

Wenn die Betriebsgeschwindigkeit des Zahnradpaars, d.h. die Eingriffsfrequenz f_z auf $p \cdot f_e / m$, ($m=1, 2, 3, \dots$) anwächst, also

$$\frac{n \cdot Z}{60} = \frac{p}{m} \cdot f_e, \quad ,$$

kann das Zahnradpaar seinen Resonanzzustand erreichen, denn $k(t, x, e_{(t)})$ oder $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ enthalten Komponenten der gleichen Frequenz f_e . Wenn bei dieser Betriebsgeschwindigkeit der zeitliche Verlauf der Gesamtzahnfederhärte $k(t, x, e_{(t)})$ und der erzwungenen Funktion $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt wird, werden die Frequenzkomponenten von $k(t, x, e_{(t)})$ oder $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ ausgedrückt durch $\sin 2\pi \cdot f_e \cdot t$ und $\cos 2\pi \cdot f_e \cdot t$. Und die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars fallen bei dieser

Frequenzkomponenten in Resonanz.

Bei Betrieb mit einer Geschwindigkeit oberhalb des Hauptresonanzpunktes, d.h. $f_z > f_e$ oder $n \cdot Z/60 > f_e$, treten je nach der Art der Zahnfehler folgende Resonanzzustände auf:

Bei einem fehlerfreien Zahnradpaar oder bei einem Zahnradpaar, dessen Zähne alle genau die gleichen Fehler aufweisen, ist $p=1$. Deshalb ist im Bereich oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit kein Resonanzzustand möglich. Für $p=2$ tritt bei $n \cdot Z/60 = 2 \cdot f_e$ eine Resonanz-Geschwindigkeit auf. Im allgemeinen können im Bereich oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit $(p-1)$ Resonanz-Geschwindigkeiten bei

$$\frac{n \cdot Z}{60} = \frac{p}{p-1} \cdot f_e, \frac{p}{p-2} \cdot f_e, \dots, p \cdot f_e \quad \text{erscheinen.}$$

Je zahlreicher deshalb die Arten der Fehler an den einzelnen Zähnen sind, desto mehr Resonanzfrequenzen treten im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes auf.

Im praktischen Betrieb tritt bei einem Zahnradpaar, wenn die Umfangsschwingungen sehr stark werden, eine Zahnflankenabtrennung ein. Dadurch verschiebt sich die tatsächliche Eigenfrequenz f_{ve} der Gleichung (1) von f_e weiter nach unten, und die Verschiebungsstrecke hängt von der Größe der Zahnflankenabtrennung ab. f_{ve} erhält man nämlich, zum Unterschied von f_e , nicht aus der homogenen Gleichung der Gleichung (1), $m \cdot \ddot{x} + 2 \cdot \sqrt{m \cdot R(t, x, e_{\omega})} \dot{x} + R(t, x, e_{\omega}) \cdot x = 0$. Wenn im Resonanzzustand Zahnflankenabtrennungen auftreten, verschiebt sich die Resonanz-Geschwindigkeit in Abhängigkeit von deren Größe in Richtung geringerer Geschwindigkeit, d.h. die Umfangsschwingungen werden etwas unterhalb $f_z = p \cdot f_e / m$, ($m=1,2,3,\dots$) sehr verstärkt. Wenn die Zahnflankenabtrennung sehr stark wird, kann durch irgend eine äußere Störung die Periodizität von $p \cdot T_z$ nach Gleichung (1) zu einer sehr langen Periode von $M \cdot T_z$ werden.

(K: sehr große positive Zahl). Die Lösung wird dann einer fast periodischen Funktion ähnlich. In diesem Fall treten im Über-Hauptresonanzbereich unendlich viele Resonanzgeschwindigkeiten auf.

Damit kann man den Einfluß der Zahnfehler auf die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars wie folgt annehmen:

- 1) Bei einem fast fehlerfreien Zahnradpaar können die Umfangsschwingungen bei einer Betriebsdrehzahl von

$$n = \frac{60}{Z} \cdot f_e, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{60}{Z} \cdot f_e,$$

oder etwas niedriger sehr stark werden. Bei Betrieb im Über-Hauptresonanzgebiet tritt kein Resonanzzustand ein und die Umfangsschwingungen werden mit zunehmender Geschwindigkeit schwächer.

- 2) Bei einem Zahnradpaar, dessen Zahnepaare gleiche Zahnfehler aufweisen, verhalten sich die Umfangsschwingungen in Bezug auf ihre Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ähnlich wie bei fehlerfreien Zahnradpaaren. Dies gilt jedoch nicht mehr, wenn die Zahnfehler sehr groß sind und eine sehr starke Zahnflankenabtrennung auftritt.

- 3) Bei einem Zahnradpaar, dessen Zahnepaare nach Art und Größe verschiedene Zahnfehler aufweisen, können bei vielen Geschwindigkeiten starke Umfangsschwingungen erscheinen, das sind die Resonanzgeschwindigkeiten. Bei Betrieb oberhalb des Hauptresonanzpunktes, d.h. $n > 60 \cdot f_e / Z$, werden die Umfangsschwingungen mit zunehmender Geschwindigkeit nicht geringer.

Bei Schräg- und Pfeilverzahnung ist der zeitliche Verlauf der Gesamtzahnfederhärte anders als bei Geradverzahnung. Doch bei Betrieb oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit liegt die Ursache der Resonanz nur in den Fehlern des Zahnradpaars, und die oben erwähnte frequenzbestimmende Wirkung der Fehler auf die Umfangsschwingungen bei Schräg- oder Pfeilverzahnung ist der Wirkung der Fehler

bei Geradverzahnung gleich. Deshalb trifft die erwähnte Annahme einer frequenzbestimmenden Wirkung der Fehler auf die Umfangsschwingungen bei allen Arten von Stirnverzahnungen im Betrieb oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit zu.

3-2. Dynamische Belastung eines Zahnrades

Die dynamische Belastung bei Getrieben wird nach folgenden drei Arten unterschieden:

1) Die auf das Zahnrad wirkende dynamische Kraft wird als

$$W_d = R(x, x, e_{\omega}) \cdot x - F(e_{\omega}, R_{\omega})$$

$$= \begin{cases} R_{\omega} \cdot (x - e_{\omega}) & \text{Einzeleingriff} \\ R_{\omega} \cdot (x - e_{\omega}) + R_{\omega+n} \cdot (x - e_{\omega+n}) & \text{Doppeleingriff} \end{cases} \quad (5)$$

definiert. Die Kraft wirkt im rechten Winkel zu den Achsen und den Lagern des Getriebes. Sie bewirkt, daß das ganze Getriebe in Schwingung gerät, und selbst die Abstrahlungsgeräusche der Zahnräder stehen in einem bestimmten Verhältnis zu W_d . Die Beschleunigung der Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaares ist dabei fast gleich W_d .

2) Die auf einen Zahn wirkende dynamische Kraft (Flankenkraft) wird als

$$F_d = R_{\omega} \cdot (x - e_{\omega}) \quad (6)$$

definiert. Diese Kraft ist wichtig, wenn die Flankenfestigkeit eines Zahnrades untersucht wird.

3) Die dynamische Beanspruchung am Zahnfuß wird als

$$\sigma_d = S(\tau) \cdot K_{d0} \cdot (\chi - e_{d0}) \quad (7)$$

definiert. Dabei ist $S(\tau)$ der die Zahnfußbeanspruchung beeinflussende Koeffizient, der es ermöglicht, die Zahnfußbeanspruchung am Bruchquerschnitt aus der Flankenkraft zu errechnen. Diese Zahnfußbeanspruchung wird natürlich wichtig, wenn die Zahnfußfestigkeit untersucht wird.

Um die nicht lineare Gleichung (1) exakt zu lösen und um die dynamische Belastung zu errechnen, wurde die Digital-Computer HITAC 5020 eingesetzt. Die Programmierung erfolgte so, daß sie den Verlauf der Eingriffe zwischen den Zahnradpaaren möglichst genau spiegelte, siehe Anlage II. Bild 19 zeigt den berechneten Verlauf von $W_{d,max}$, $F_{d,max}$, $\sigma_{d,max}$ in Abhängigkeit von

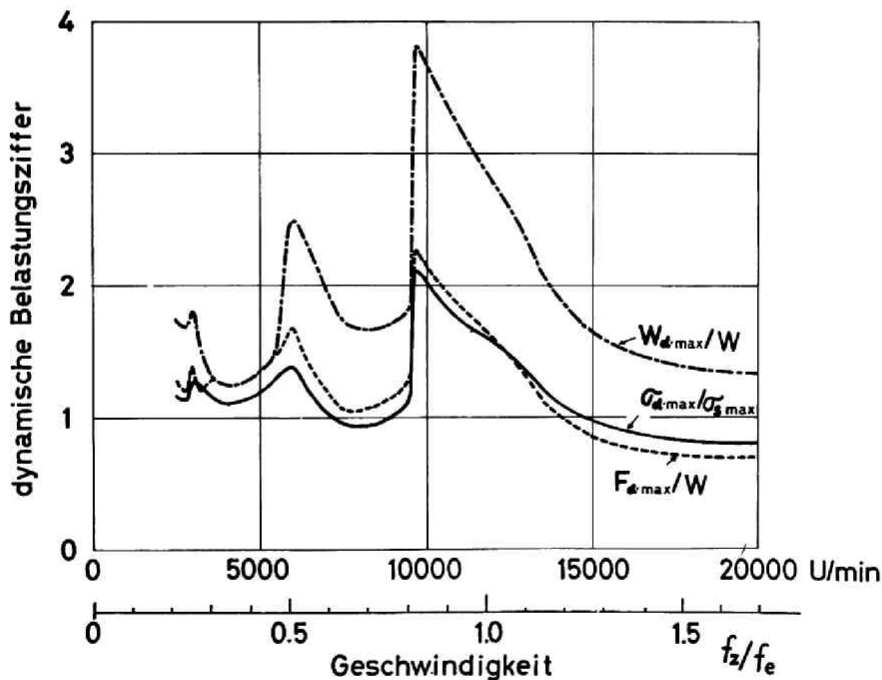


Bild 19. Berechneter Verlauf der dynamischen Belastungsziffer in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit

der Betriebsgeschwindigkeit. Das in der Berechnung verwendete Zahnräderpaarmodell war vollkommen fehlerfrei und wurde mit einem Drehmoment von 1000 kp·cm betrieben. Seine Abmessungen sind aus Tafel 1 ersichtlich. Auf der Ordinate ist die dynamische Belastungsziffer, als Verhältnis der größten dynamischen Belastung $W_{d,max}$, $F_{d,max}$, $\sigma_{d,max}$ zu ihrem größten statischen Wert W bzw. $\sigma_{s,max}$, aufgetragen.** Die Abszisse gibt die Geschwindigkeit wieder, die aus dem Verhältnis von der Eingriffsfrequenz f_z zur nominellen Eigenfrequenz f_e gewonnen wird. Die drei Kurven $W_{d,max}/W$, $F_{d,max}/W$, $\sigma_{d,max}/\sigma_{s,max}$, zeigen im großen einen ähnlichen Verlauf, wobei sich die Resonanzpunkte vor $f_z/f_e = 1$ und bei $f_z/f_e = 1/2, 1/3, \dots$ befinden. Aber im Detail ist die Kurve von $W_{d,max}/W$ etwas verschieden von den beiden anderen der dynamischen Belastungsziffern, jeweils für einen Zahn $F_{d,max}/W$ bzw. $\sigma_{d,max}/\sigma_{s,max}$. Die dynamische Belastungsziffer der auf das Zahnrad wirkenden dynamischen Kraft $W_{d,max}/W$ ist dabei meistens größer als die der dynamischen Flankenkraft $F_{d,max}/W$ und der dynamischen Zahnfußbeanspruchung $\sigma_{d,max}/\sigma_{s,max}$, besonders im Hauptresonanzbereich wird die Differenz beträchtlich. Bei Betrieb bei Geschwindigkeiten weiter oberhalb des Hauptresonanzpunktes werden die dynamischen Belastungsziffern für Flankenkraft und Zahnfußbeanspruchung kleiner als 1. Das zeigt, daß ein mit Überhauptresonanzgeschwindigkeit laufendes Hochgeschwindigkeitsgetriebe gegenüber einem mit niedriger Geschwindigkeit laufenden Getriebe, was die Zahnradfestigkeit betrifft, im Vorteil ist. Derartige Ergebnisse wurden bereits vielfach veröffentlicht [9], [11]. Aber es ist fraglich, ob alle Zahnäder das gleiche Verhalten aufweisen, da die oben erwähnten Ergebnisse nur mit fast fehlerfreien Zahnäderpaaren erzielt wurden.

** $F_{s,max}$ ist W .

3-3. Einführung des Eingriffsstoßes in die Berechnung

Um den Einfluß des Eingriffsstoßes auf die dynamische Belastung und die Umfangsschwingungen zu ergründen, wurde die Methode von Reswick [6] mit einigen Modifikationen angewendet. In seiner Theorie des Eingriffsstoßes stellte Reswick die Hypothese auf, daß die Stoßbeschleunigung für das neu in Eingriff kommende Zahnepaar während des Eingriffes an der Zahnkopfkante konstant ist. Aber die Hypothese schien nicht überzeugend, so wurde die Modifikation eingeführt, daß das neu in Eingriff kommende Zahnepaar während des Eingriffes an der Zahnkopfkante einen angenommenen Zahnfehler aufwies, der durch eine geometrische Betrachtung des Eingriffes berechnet werden konnte. Dann wird nach dem gleichen Verfahren von Reswick die Bewegungsgleichung für den Eingriffsstoß wie folgt:

$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot \dot{x} + (k_{(1)} + \tilde{k}_{(2)}) \cdot x = W + k_{(1)} \cdot e_{(1)} + \tilde{k}_{(2)} \cdot (e_{(2)} + c \cdot V^2 \cdot t^2) \quad (8)$$

dabei ist

$$c = \frac{\left(1 + \frac{r_{02}}{r_{01}}\right) \cdot \frac{t_g \alpha}{\cos \alpha}}{2 \cdot r_{01} \left\{ \left(1 + \frac{r_{02}}{r_{01}}\right) \cdot \frac{t_g \alpha}{t_g \alpha_{k2}} - 1 \right\}}$$

und $\tilde{k}_{(2)}$ ist die Zahnfederhärte des Zahnepaares im Berührungsbereich der Zahnkopfkante, und V die Betriebsgeschwindigkeit auf der Eingriffslinie, Einzelheiten siehe Anlage III. Natürlich gilt die Gleichung (8) für die Umfangsschwingungen des Zahnradpaars nur während des Eingriffes an der Zahnkopfkante. Nach Ablauf der Zahnkopfkanten-Berührung, wird die Gleichung zu

$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot \dot{x} + (k_{(1)} + k_{(2)}) \cdot x = W + k_{(1)} \cdot e_{(1)} + k_{(2)} \cdot e_{(2)} \quad (9)$$

Bild 20 zeigt die berechneten maximalen dynamischen Flankenkräfte nach den Gleichungen (8) und (9), dabei ist $e_{(1)} = e_{(2)} = 0$. Die Anfangsbedingungen zu Beginn des

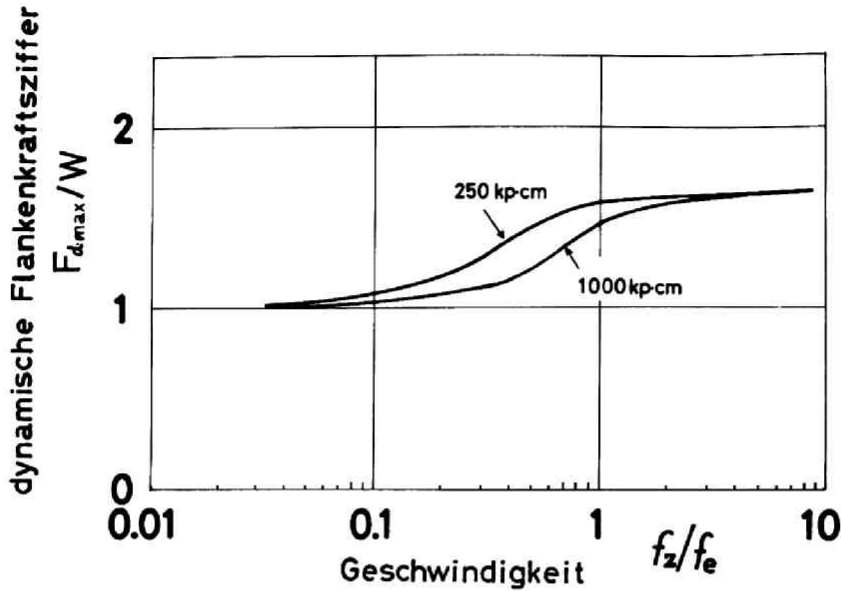


Bild 20. Einfluß des Eingriffsstoßes auf die dynamische Belastung nach Berechnung, ohne Berücksichtigung des Fortlaufs des Eingriffes

Doppeleingriffes oder des Eingriffsstoßes wurden als

$$\chi = \frac{W}{k_{ef}} \quad , \quad V = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_g \cdot f_z}{Z}$$

angenommen, mit k_{ef} als Zahnfederhärte gerade vor dem Ende des Einzeleingriffes. Bei dieser Berechnung wurde der Fortlauf des Eingriffes, wie von Doppeleingriff zu Einzeleingriff usw., nicht berücksichtigt. Die maximalen Flankenkräfte in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit zeigen mit zunehmender Geschwindigkeit einen zunehmenden Verlauf, was dem Ergebnis von Reswick fast vollkommen entspricht. Es ist nunmehr nicht schwierig, die Gleichung (8) für den Eingriffsstoß in die Gleichung (1) für die Umfangsschwingungen des Zahnradpaares

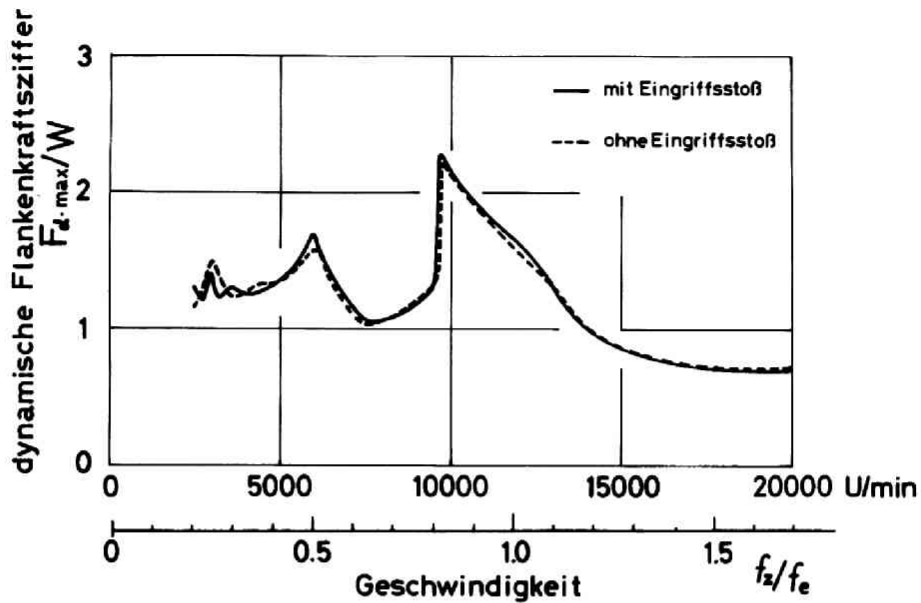
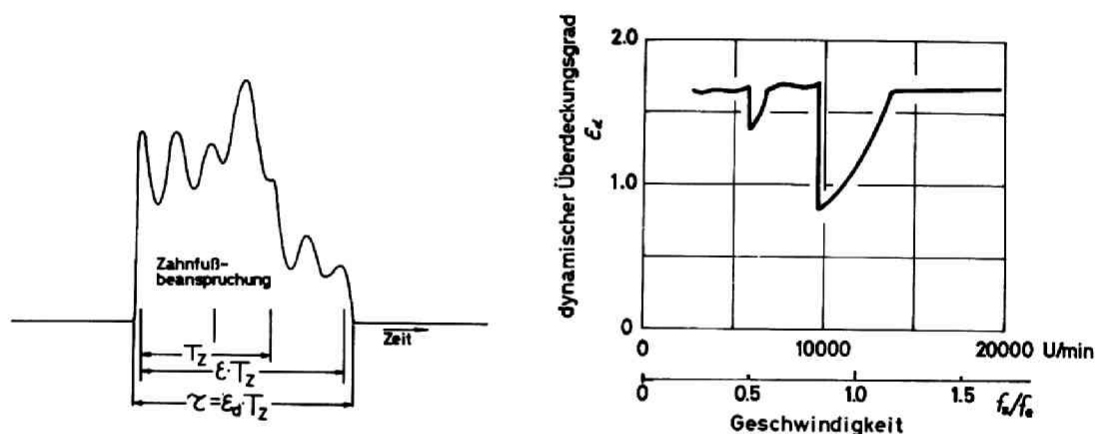


Bild 21. Einfluß des Eingriffsstoßes auf die dynamische Belastung nach Berechnung, mit Berücksichtigung des Fortlaufs des Eingriffes (errechnet bei 1000 kp·cm)

einzusetzen. Bild 21 zeigt den Einfluß des Eingriffsstoßes auf die dynamische Flankenkraft, wobei für die Berechnung die Gleichung einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung des Eingriffsstoßes herangezogen wurde. Man sieht, daß der Einfluß des Eingriffsstoßes auf die maximale dynamische Flankenkraft sehr gering ist, und sein Verlauf in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit nicht so einförmig ist wie in Bild 20. Für die nachfolgenden Berechnungen wurde trotzdem die Gleichung für die Umfangsschwingungen unter Berücksichtigung des Eingriffsstoßes verwendet, sodaß die Ergebnisse die tatsächlichen Gegebenheiten exakt widerspiegeln.

3-4. Dynamischer Überdeckungsgrad

Wenn die Bewegung eines Zahnradpaars abläuft, ist der tatsächliche Überdeckungsgrad (d.h. der dynamische Überdeckungsgrad) vom theoretischen (oder geometrischen) Überdeckungsgrad etwas verschieden. Daher wurde der dynamische Überdeckungsgrad herangezogen, um das dynamische Verhalten der Zähneeingriffe zu zeigen. Der dynamische Überdeckungsgrad ϵ_d wird ebenso definiert wie der theoretische Überdeckungsgrad, als das Verhältnis zwischen der Berührungszeit eines Zahnes τ und der Eingriffsperiode T_z , d.h. τ/T_z , Bild 22 (a).



(a) Berührungszeit einer Zahnflanke und dynamischer Überdeckungsgrad

(b) Berechneter Verlauf des dynamischen Überdeckungsgrades. theoretischer Überdeckungsgrad $\epsilon = 1,56$

Bild 22. Dynamischer Überdeckungsgrad

Bild 22 (b) zeigt den berechneten Verlauf des dynamischen Überdeckungsgrades in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit. Das in der Berechnung verwendete Zahnräderpaarmodell ist das gleiche wie in Bild 19. Der dynamische Überdeckungsgrad fällt am Haupt- und am zweiten Resonanzpunkt stark ab. Die Ursache dieses Abfalls ist die Zahnflankenabtrennung. Im Bereich, wo keine Zahnflankenabtrennung geschieht, ändert der dynamische Überdeckungsgrad nur wegen der Umfangsschwingungen seinen Wert ein wenig.

4. Messung der dynamischen Beanspruchung am Zahnfuß

Zur experimentellen Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaares und der dynamischen Belastung, wurde die dynamische Beanspruchung an den Zahnfüßen mit Drahtmeßstreifen gemessen. Die Meßergebnisse entsprachen der Gleichung (7). Der Grund für die Wahl der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen als Kriterium für die Untersuchung der Umfangsschwingungen war wie folgt:

- 1) Die dynamische Zahnfußbeanspruchung ist sehr wichtig für die Berechnung des Getriebes, und ebenso für die Festigkeitsberechnung unter Einbeziehung der dynamischen Flankenkraft, die wiederum aus dem Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung entnommen werden kann.
- 2) Bei extrem hohen Geschwindigkeiten ist die Messung der Zahnfußbeanspruchungen wesentlich leichter als die der Beschleunigung der Umfangsschwingungen. Und die dynamische Zahnfußbeanspruchung wird durch zusätzliche Störschwingungen, wie die Schwingungen des Gehäuses, weniger beeinflusst als die Beschleunigung.

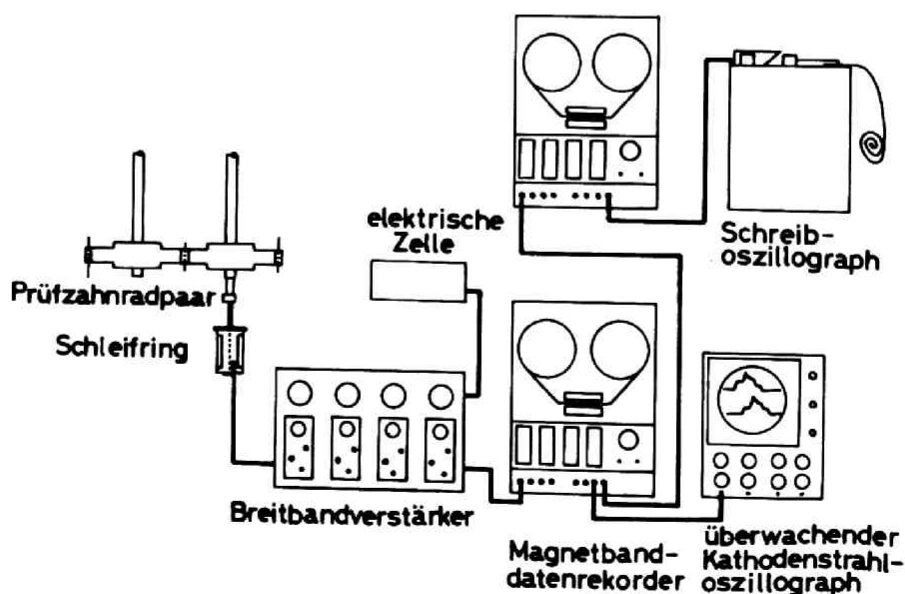


Bild 23. Meßgeräteanordnung

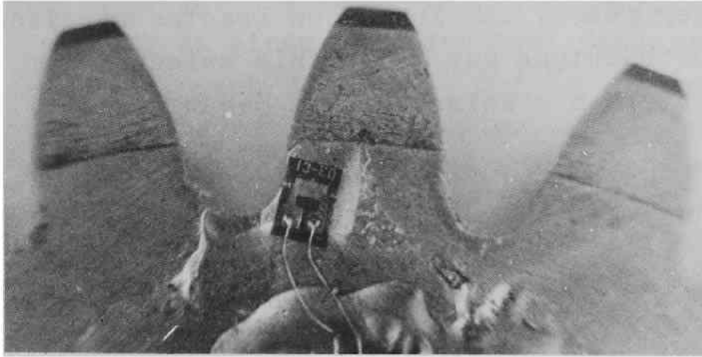


Bild 24. Meßeinrichtung auf dem Zahnrad

Bild 23 zeigt schematisch die bei der Messung verwendete Geräteanordnung. Zur Messung der dynamischen Beanspruchung am Zahnfuß wurden Drahtmeßstreifen auf die Seitenflächen der Zähne an den Druckseiten ihrer Bruchquerschnitte festgeklebt,

Bild 24. Diese Drahtmeßstreifen hatten eine Messlänge von 0,3 mm, und eine flache Frequenzkurve bis über 100 kHz. Die durch die Zahnfußbeanspruchung induzierte elektrische Spannung wurde durch einen besonderen Typ von Scheibenschleifring, (siehe Bild 4), zum Breitbandverstärker und von dort zum Magnetbanddatengerät geleitet.

Der Schleifring wurde nach unseren Angaben hergestellt. Seine Betriebsdauer war ca. 20 min. bei 20000 U/min, und durch Nachstellen der Kontaktbürsten war er noch länger verwendbar.

Die in einem Magnetbanddatengerät aufgezeichneten Meßdaten wurden zu einem weiteren Magnetbanddatengerät geleitet und die Zeiteinheiten der Meßdaten wurden auf das genau 400-fache ausgedehnt, sodaß die Frequenzen zu den ursprünglich aufgezeichneten Meßdaten im Verhältnis 1/400 standen. Die sich ergebenden Daten wurden mit dem Schreiboszillographen aufgezeichnet.

Die gegenüber den absoluten Werten der induzierten elektrischen Spannungen auftretenden Differenzen, die durch die etwas differierenden Klebstellen für die Drahtmeßstreifen an den Zahnfüßen verursacht wurden, wurden damit ausgeglichen, daß für jeden Drahtmeßstreifen für die weitere Betrachtung das Verhältnis zwischen dem dynamischen Wert und dem statischen Wert herangezogen wurde.

Für die Messungen wurden für den Prüfstand die Betriebsbedingungen gemäß Bild 8 zugrunde gelegt.

5. Einfluß der Flankenformfehler auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung

5-1. Bei einem fehlerfreien Zahnradpaar

Bild 25 zeigt die Meßwerte der dynamischen Zahnfußbeanspruchung an einem Zahn des fast fehlerfreien Abtriebszahnades, nach 2-2-2 1). Auf der Ordinate ist die dynamische Beanspruchungsziffer am Zahnfuß aufgetragen, die das Verhältnis zwischen dem höchsten Wert der Zahnfußbeanspruchung im Lauf $\sigma_{d,max}$ und der höchsten statischen Zahnfußbeanspruchung $\sigma_{s,max}$ wiedergibt. Die Streuung der dynamischen Zahnfußbeanspruchung bei jeder Umdrehung des Rades ist

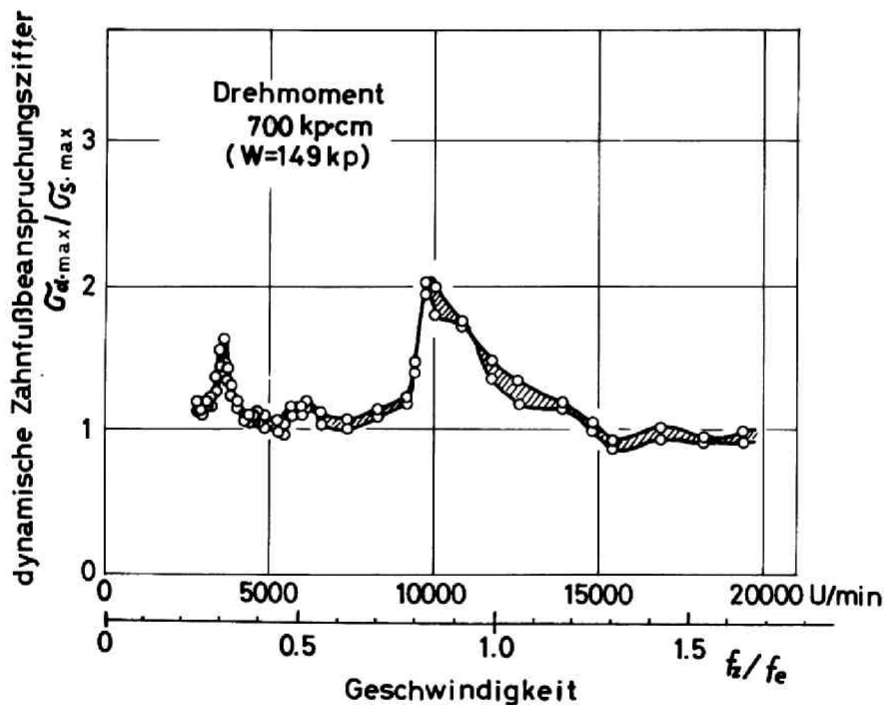


Bild 25. Dynamische Beanspruchung und ihre Streuung an einem Zahnfuß eines fast fehlerfreien Abtriebszahnades in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

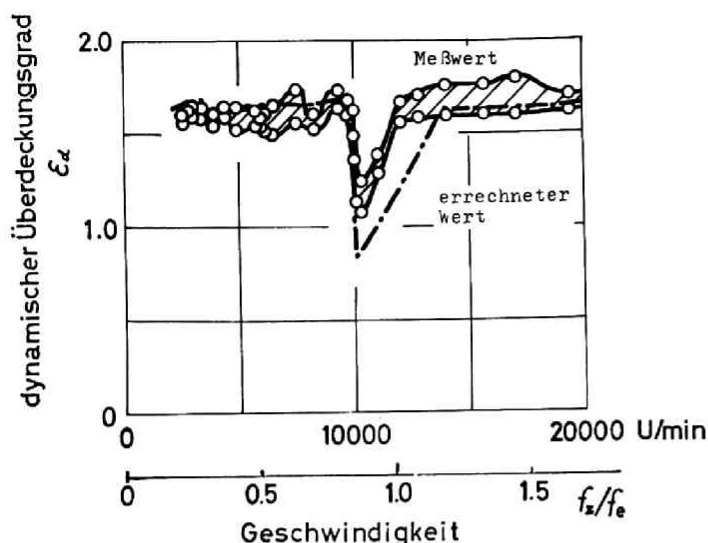


Bild 26. Verlauf und Streuung des dynamischen Überdeckungsgrades an einem Zahn in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

gering, sie wird durch die schraffierten Flächen zwischen den beiden Kurven auf dem Bild angezeigt. Daraus ersieht man die Existenz einer Periodizität der Zahnfußbeanspruchungen bei jeder Umdrehung des Rades. (Wenn die Übersetzung eines Getriebes nicht 1,0 ist, erhält man die Periodizität aus dem kleinsten gemein-

samen Vielfachen der Zähnezahl von Rad und Ritzel mal T_z .) Der Verlauf der dynamischen Beanspruchungsziffer in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ist der für ein fehlerfreies Zahnradpaar berechneten Kurve sehr ähnlich, siehe z.B. Bild 19. Im Betriebsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes tritt kein Resonanzzustand ein und die dynamische Zahnfußbeanspruchungsziffer nimmt mit zunehmender Betriebsgeschwindigkeit ab, beziehungsweise eine klare Spitze eines zweiten Resonanzpunktes (5900 U/min) ist nicht erkennbar. Aber diese Tatsache bestätigt experimentell die theoretische Annahme nach 3-1-3. D.h. man kann die Ursache dieses Phänomens wie folgt ermitteln: Der Meßwert des dynamischen Überdeckungsgrades bei einem Drehmoment von 700 kp·cm ist ca. 1,5, Bild 26, und die Streuung von ϵ_d ist klein, d.h. die Zeitdauer des Doppelseingriffes ist der des Einzeleingriffes gleich. Folglich enthält der zeitliche Verlauf der Gesamtzahnfederhärte

$k(t, x, e_{(t)})$ fast keine geradzahlige Komponente, d.h. wenn man den Nullpunkt günstig wählt, kann $k(t, x, e_{(t)})$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$k(t, x, e_{(t)}) = a_0 + a_1 \sin 2\pi f_z t + a_3 \sin 2\pi \cdot 3 f_z t + a_5 \sin 2\pi \cdot 5 f_z t + \dots$$

Da das Zahnradpaar geringe Fehler aufweist, verliert das erzwungene Glied $F(e_{(t)}, k_{(t)})$ in Gleichung (1) auch seine geradzahlige Komponenten

$$f_z = \frac{1}{2} \cdot f_e, \quad \frac{1}{4} \cdot f_e, \quad \dots$$

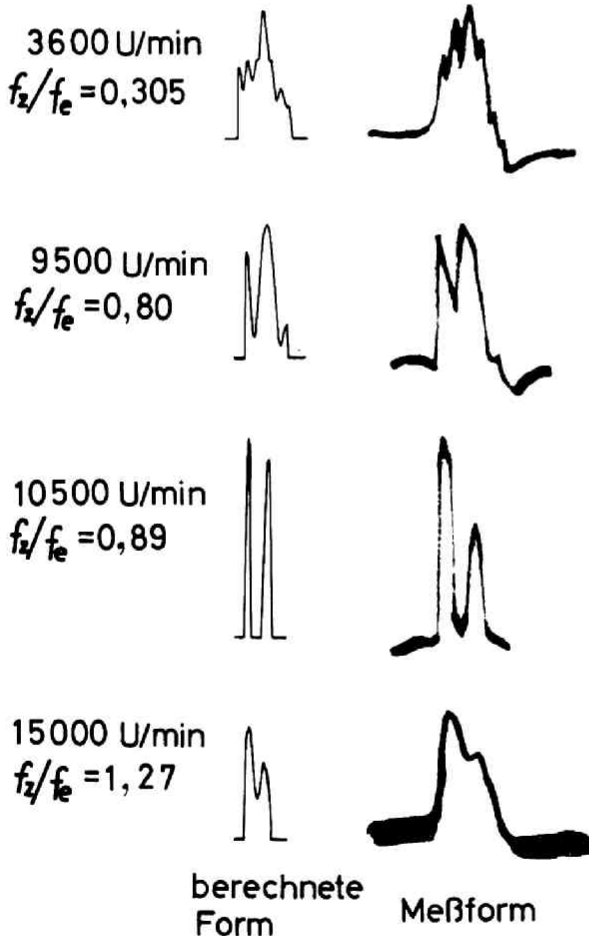


Bild 27 zeigt einen Vergleich zwischen dem gemessenen zeitlichen Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung und dem errechneten Verlauf für verschiedene Geschwindigkeiten. Die Berechnung erfolgte unter der Voraussetzung, daß auf jeden Zahn des fehlerfreien Zahnrades eine vollkommen gleiche Kraft wirkte. Bei einem fast fehlerfreien Zahnradpaar, das für die Zahnfußbeanspruchung des Zahnrades eine Periodizität aufweist, stimmt der Meßwert der Zahnfußbeanspruchungen mit dem errechneten Wert gut überein.

Bild 27. Vergleich der berechneten mit den gemessenen Zahnfußbeanspruchungen (gemessen bei Drehmoment 1100 kp·cm)

Aus diesen Ergebnissen wurde entnommen, daß

das dynamische Verhalten von mit Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit laufenden, fast fehlerfreien Geradverzahnungen durch die bisherige Theorie, die sich auf dem Gebiet der niedrigen und mittleren Geschwindigkeiten bestätigt hat, erklärt werden kann, und daß die hierbei verwendeten Berechnungen für die Umfangsschwingungen und dynamische Belas bei fast fehlerfreien Zahnradpaaren genügend genau sind. Das letztere bildet eine Garantie für die Richtigkeit der numerischen Untersuchungen von nicht direkt experimentell bestätigbaren Objekten, wie die Hertzsche Beanspruchung durch eine dynamische Flankenkraft.

5-2. Bei einem Zahnradpaar, dessen Zähne fast alle in gleicher Weise verschlissene Flankenformen aufweisen

Bild 28 zeigt die Meßwerte der dynamischen Zahnfußbeanspruchung für einen Zahn des Abtriebszahnrades, der immer mit dem gleichen Zahn eines anderen Zahnrades in Berührung gekommen ist und sich verschlissen hat, wie 2-2-2 2). Auch wenn die Zahnflanken stark verschlissen sind, so lange jeder Zahn die gleiche Flankenform hat, zeigen die Kurven der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen meistens etwa den gleichen Verlauf wie bei einem fehlerfreien Zahnradpaar, und ihre Höhe ist auch gleich. Die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen eines Zahnes sind in diesem Fall bei jeder Umdrehung des Zahnrades periodisch etwa formgleich, doch im Bereich etwas oberhalb des Hauptresonanzpunktes, wo die Zahnflankenabtrennung stattfindet, geht die Periodizität manchmal verloren, was verschlissene von fehlerfreien Zahnradpaaren unterscheidet. Noch weiter oberhalb des Hauptresonanzpunktes verschwindet die Zahnflankenabtrennung wie im Fall von fehlerfreien Zahnradpaaren. Auch das

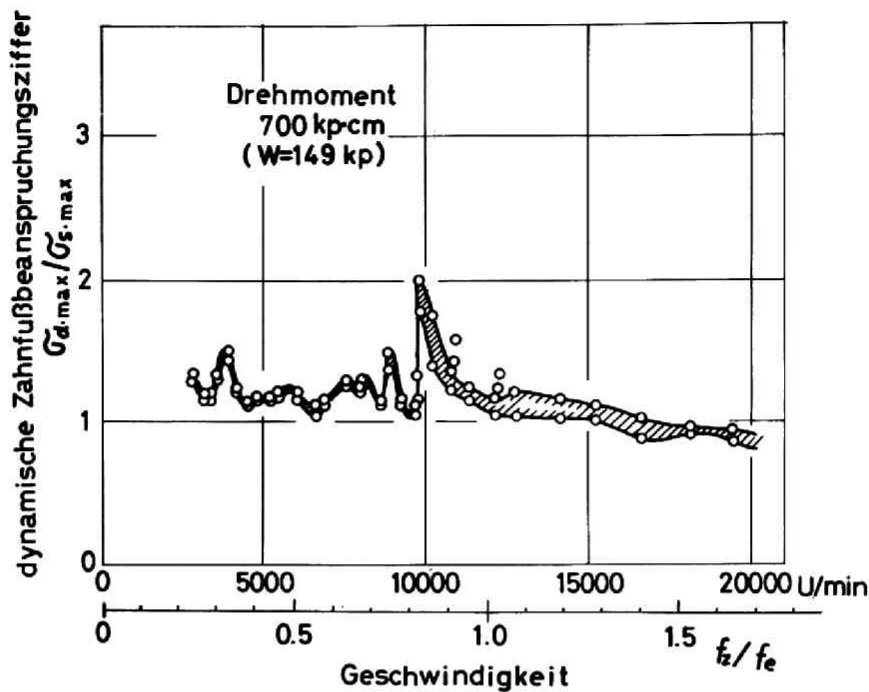


Bild 28. Dynamische Beanspruchung und ihre Streuung an einem Zahnfuß eines verschlissenen Abtriebszahnrades, dessen Zähne fast alle die gleiche Flankenform haben

bestätigt die theoretische Annahme aus 3-1-3 experimentell.

5-3. Bei einem Zahnradpaar mit Zähnen von ungleich verschlissenen Flankenformen

Bild 29 (a),(b) zeigt den Verlauf und die Streuung der Werte des dynamischen Überdeckungsgrades eines Zahnes von zwei verschlissenen Zahnradpaaren. Das Zahnradpaar (B)

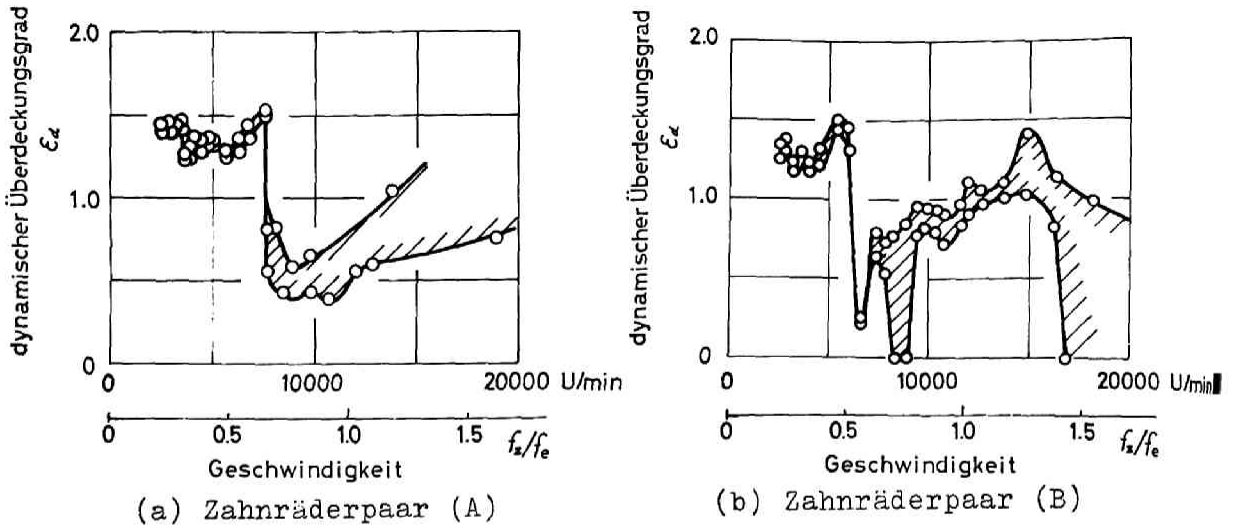


Bild 29. Dynamischer Überdeckungsgrad und seine Streuung bei je einem Zahn von zwei verschlissenen Zahnradpaaren (A), (B), deren Zähne ungleiche Flankenformen haben (gemessen bei Drehmoment 700 kp cm)

ist das Paar aus 2-2-2 3). Das Zahnradpaar (A) hat auch ungleich verschlissene Flankenformen wie das Zahnradpaar (B), aber vor der Messung war die Größe der Flankenformfehler etwas geringer als beim Zahnradpaar (B). Bei diesen Messungen war der Schmierzustand der Zahnrädern sehr gut, sodaß er keine weitere Flankenformänderung veranlaßte. Wo der dynamische Überdeckungsgrad plötzlich abfällt, muß man sich den tatsächlichen Hauptresonanzpunkt vorstellen. Im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes wird der dynamische Überdeckungsgrad sehr klein und seine Streuung sehr weit. Die Streuung der ϵ_d -Werte bei jeder Berührung der gleichen Zahnflanken von Rad und Ritzel zeigt, daß der zeitliche Verlauf der Umfangsschwingungen nicht genau dieselbe Periode hat wie die Gesamtzahnfederhärte $k(x, x, e_n)$ und die durch die Zahnfehler erzwungene Kraft $F(e_n, k_n)$. Der Grad

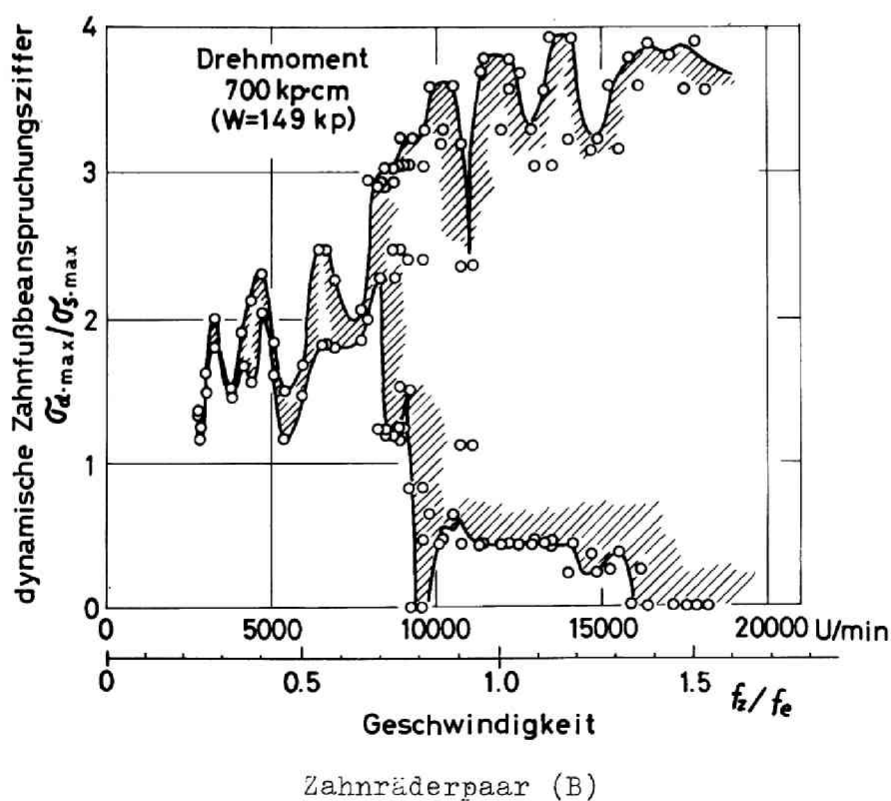
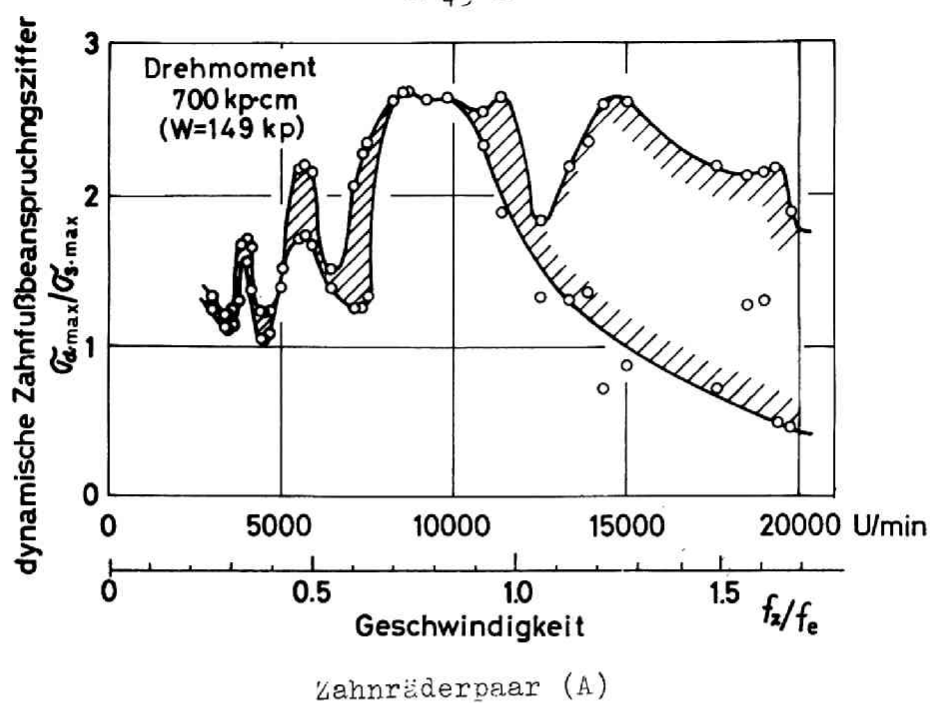


Bild 30. Dynamische Beanspruchung und ihre Streuung an einem Zahnfuß der verschlissenen Zahnräderpaare (A), (B) (Abtriebszahnrad)

dieser Aperiodizität wird durch der Größe der Streuung der ϵ_d -Werte ausgedrückt.

Bild 30 zeigt die Meßwerte der dynamischen Zahnfußbeanspruchung eines Zahnes des Abtriebszahnrades der gleichen Zahnräderpaare wie in Bild 29. Die Hauptresonanzpunkte der beiden Zahnräderpaare (A) und (B) verschieben sich ziemlich stark in Richtung zur geringeren Betriebsgeschwindigkeit. Derjenige des Zahnräderpaares (A) befindet sich bei 7100 U/min. Es ist nicht leicht, aus dem Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung für das Zahnräderpaar (B) den Hauptresonanzpunkt herauszulesen. Aber nach dem Verlauf des dynamischen Überdeckungsgrades, Bild 29 (B), scheint die Hauptresonanzfrequenz f_{ve} in großer Entfernung von f_e , etwa bei 6800 U/min, zu liegen. Im Bereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes kann man die Existenz einer Periodizität der Zahnfußbeanspruchungen eines Zahnes

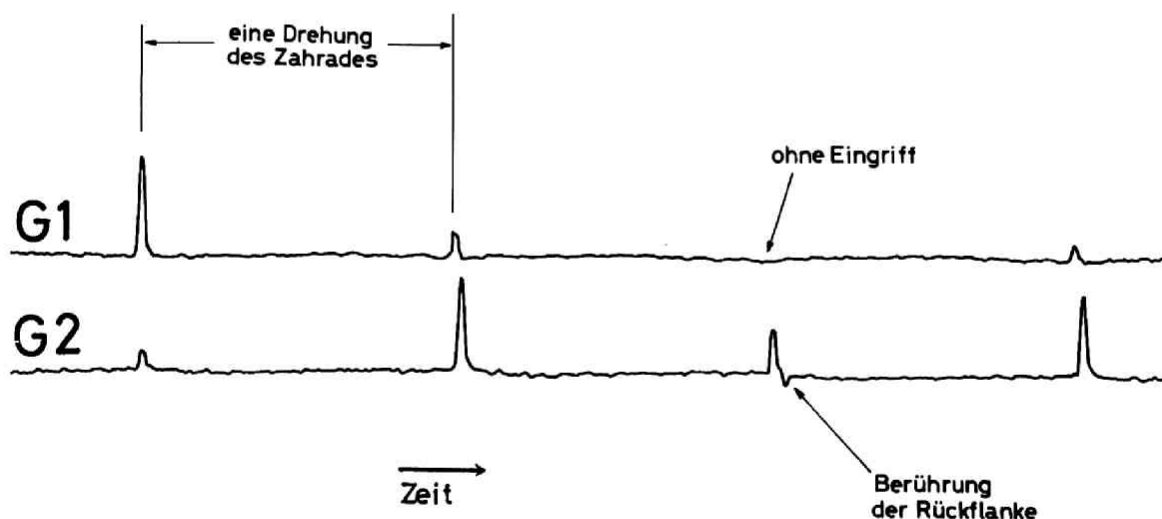


Bild 31. Meßverlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung bei zwei aufeinanderfolgenden Zähnen des getriebenen Zahnräderpaares (B) im Bereich oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit (gemessen bei 16600 U/min, 700 kp cm)

nach je einer Umdrehung des Zahnrades annehmen, und die Höhe der dynamischen Zahnfußbeanspruchung ist etwas größer als in den Bildern 25, 28. Aber im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes verschwindet die Zahnflankenabtrennung nie und die Periodizität der Zahnfußbeanspruchung je Umdrehung des Zahnrades verliert sich ganz. Das heißt, die Zahnfußbeanspruchung wird einmal sehr groß, ein andermal sehr klein, und die Streuung ihrer Werte wird sehr weit. Damit nimmt also die maximale Höhe der dynamischen Zahnfußbeanspruchung im schneller laufenden Bereich mit der Geschwindigkeit nicht ab, sondern häufig nimmt sie sogar zu.

Bild 31 zeigt ein Beispiel der dynamische Zahnfußbeanspruchung bei zwei benachbarten Zähnen (Zahn G1, G2) eines verschlissenen Abtriebszahnrades, dessen Geschwindigkeit oberhalb des Hauptresonanzpunktes gelegen hatte. Die Zahnfußbeanspruchung ist ganz anders als beim fehlerfreien Zahnradpaar, vgl. Bild 28. Man sieht, daß die Belastung bei jedem Zahn stoßartig auftritt, daß die Flankenberührung öfters einige Zähne überspringt, und daß sich die Rückflanken der Zähne manchmal berühren. Im Bild ist auch eine Stelle zu sehen, wo sich das Zahnrad ohne Flankenberührung weiterdreht. Im Betrieb kann es vorkommen, daß ein Zahn eine 5- oder 6-malige Radumdrehung ohne Berührung übersteht. Der Ausschlag der negativen Zahnfußbeanspruchung, der durch die Rückflankenberührung auftritt, wird weitgehend von der Weite des Flankenspieles beeinflusst. Sie erreichte in obigem Fall manchmal bis zu $\sigma_a / \sigma_{s,max} = -0,45$.

Das Phänomen, daß im schneller laufenden Bereich von $f_z / f_e > 1$ die Umfangsschwingungen mit zunehmender Geschwindigkeit nicht abnehmen, rührt von den vielfältigen Flankenformfehlern des Zahnradpaares her, wie unter 3-1-3 erwähnt. Die Schwingungen des verschlissenen Zahnradpaares schaukeln die Schwingungen des Prüfstandes gefährlich auf,

und die Schwingungen der Achse oder des Gehäuses verändern die relative Stellung der beiden Zahnräder des Zahnräderpaares zu einander und die Form und Stärke der Belastung. Es tritt dabei eine Rückwirkung auf die Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares auf, wodurch der Bereich der Resonanzgeschwindigkeit verbreitert wird. Deshalb ist es unangemessen, bei der Ermittlung des dynamischen Verhaltens eines Zahnräderpaares nur dieses selbst zu berücksichtigen. Es müssen vielmehr die Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares im Zusammenhang mit den Schwingungen des Gehäuses, der Lager und der Achse usw. untersucht werden.

5-4. Abnahme der tatsächlichen Haupteigenfrequenz
durch die Zahnflankenabtrennung

Die tatsächliche Haupteigenfrequenz f_{we} der Umfangsschwingungen des Zahnradpaars ist immer niedriger als die nominelle Eigenfrequenz f_e , und die Stärke der Abnahme wird durch die Art und Größe der Zahnfehler ziemlich stark beeinflusst. Da die Ursache dieser Abnahme die Zahnflankenabtrennung ist, und ϵ_d als Kriterium der Zahnflankenabtrennung anzusehen ist, d.h. je kleiner ϵ_d , desto größer die Zahnflankenabtrennung, ist ein bestimmtes Verhältnis zwischen der tatsächlichen Haupteigenfrequenz f_{we} und dem dynamischen Überdeckungsgrad ϵ_d festzustellen.

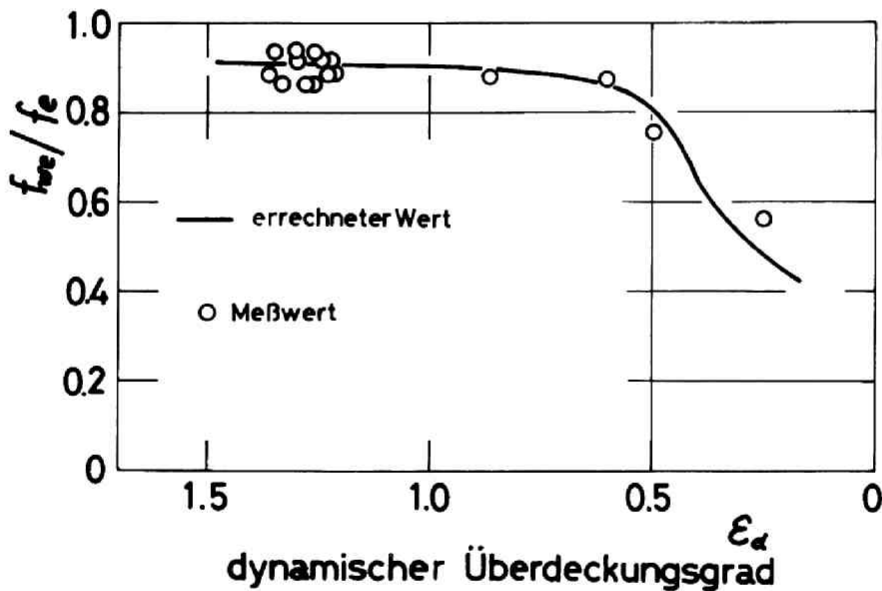


Bild 32. Abnahme der tatsächlichen Hauptresonanzfrequenz
in Abhängigkeit vom dynamischen Überdeckungsgrad

Bild 32 zeigt die errechneten Werte und die Meßwerte der tatsächlichen Haupteigenfrequenz in Abhängigkeit vom dynamischen Überdeckungsgrad. Die Abmessungen des Zahnradpaars sind aus Tafel 1 zu ersehen. Zur Berechnung der tatsächlichen Haupteigenfrequenz f_{we} , wurden sowohl Analog- wie Digital-Computer verwendet. Das Bild zeigt die gute Übereinstimmung der Meßwerte mit den errechneten Werten. Zwar wurde die Berechnung für das Zahnradpaar mit einem geometrischen Überdeckungsgrad von $\epsilon = 1,56$ durchgeführt, aber der Verlauf der errechneten Abnahmekurve von f_{we} wurde durch den Wert des geometrischen Überdeckungsgrades ϵ des Zahnrades wenig beeinflusst.

5-5. Einfluß der Verschlechterung der Formgenauigkeit des Zahnrades auf die dynamische Belastung

Bild 33 zeigt einen Vergleich zwischen der dynamischen Zahnfußbeanspruchung bei einem sehr genauen Zahnradpaar und bei Paaren von geringerer Genauigkeit. Die unterste Kurve (a) der drei Kurven, die die Ergebnisse aus den obigen Ausführungen veranschaulichen, entspricht dem Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung eines sehr genauen Zahnradpaars, die mittlere Kurve (b) entspricht dem von Zahnradpaaren von geringerer Genauigkeit, und die oberste (c) dem mit außerordentlich großen Zahnradfehlern. Aus der Tatsache, daß die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars mit großen Zahnfehlern im Betriebsgeschwindigkeitsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes dauernd im Resonanzzustand verbleiben, ersieht man, daß das Verhältnis zwischen der dynamischen Zahnfußbeanspruchung eines genauen Zahnradpaars und der eines Zahnradpaars mit großen Fehlern, im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes eine wesentlich größere

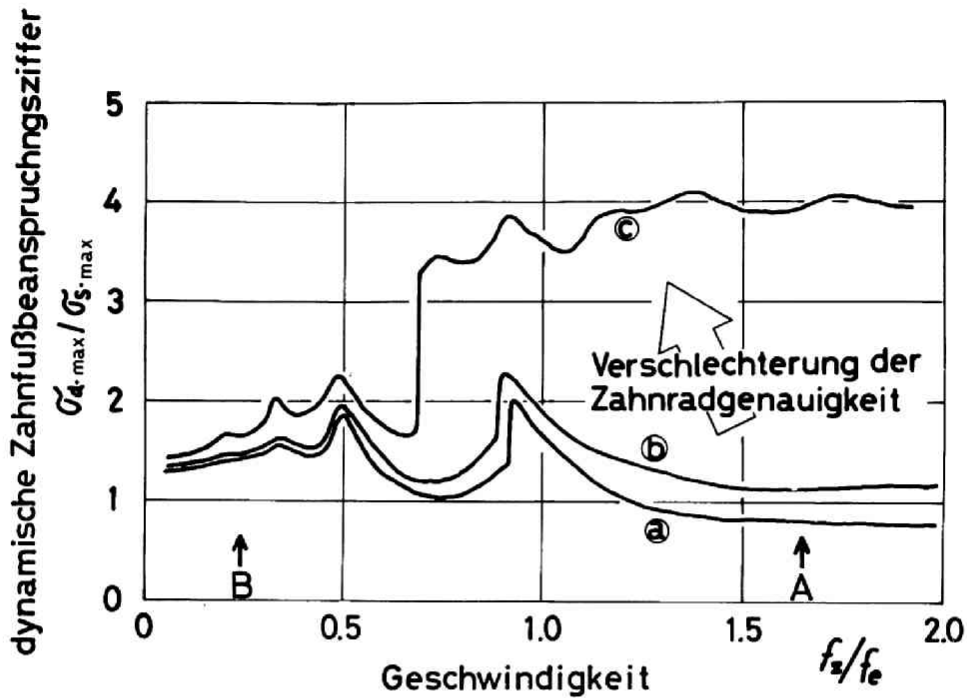


Bild 33. Vergleich der dynamische Belastung zwischen Zahnradpaaren von großer und geringerer Genauigkeit

Zahl darstellt, als im Bereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes. Damit kann man den entwicklungsmäßigen Verlauf für die dynamische Zahnfußbeanspruchung im Betrieb, nämlich, daß auch ein sehr genau hergestelltes Zahnradpaar, wenn einmal Zahnschäden aufgetreten sind, allmählich seine Genauigkeit verliert, und die dynamische Belastung mehr und mehr zunimmt, bis es schließlich zum Bruch kommt, wie folgt annehmen: Bild 34 zeigt im Großen die Fortentwicklung bei Betrieb unterhalb des Hauptresonanzpunktes (z.B. entsprechend Punkt B in Bild 33) und bei Betrieb

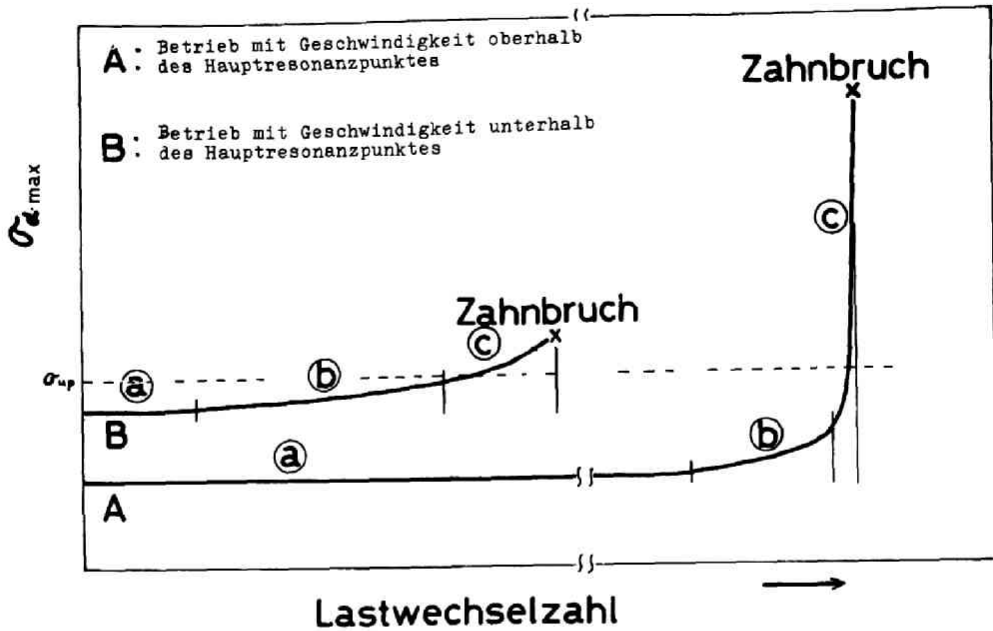


Bild 34. Angenommener Fortgang des Zahnradenschadens zum Bruch

oberhalb des Hauptresonanzpunktes (z.B. entsprechend Punkt A in Bild 33). Das genau hergestellte Zahnrad hält im Betrieb oberhalb des Hauptresonanzpunktes, verglichen mit dem Betrieb unterhalb des Hauptresonanzpunktes, bis zu seiner Genauigkeitsverschlechterung (im Bereich a im Bild) eine viel größere Zahl von Lastwechseln aus, da seine dynamische Beanspruchung kleiner ist. Aber wenn einmal die Verschlechterung der Zahnradgenauigkeit eingesetzt hat, vergrößert sich beim Übergang vom Bereich

ⓑ in den Bereich ⓒ die dynamische Belastung in zunehmendem Maße, und es genügt eine kleinere Lastwechselzahl als bei niedriger Betriebsgeschwindigkeit, daß es zum Zahnbruch kommt. Wenn man die Betriebszeiten vom Beginn der Verschlechterung der Zahnradgenauigkeit bis zum Zahnbruch vergleicht, erkennt man, daß diese bei sehr hoher Geschwindigkeit vielfach kürzer ist, als nach dem Verhältnis der erwähnten Lastwechselzahlen zu erwarten war.

Die sichere Betriebsgeschwindigkeit, bei der die Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaares nicht in den Resonanzzustand geraten, scheint im Bereich $f_z/f_e < 0,5-0,6$ zu liegen, da sich der tatsächliche Resonanzpunkt mit sich verschlechternder Zahnradgenauigkeit im allgemeinen nach der geringeren Geschwindigkeit hin verschiebt, wenn im Bild auch die Hauptresonanzgeschwindigkeit schon bei $f_z/f_e = 0,7$ auftritt. Deshalb besteht die Möglichkeit, daß bei einem Zahnräderpaar, das mit einer Geschwindigkeit von $f_z/f_e > 0,5-0,6$ betrieben wird, schon nach kurzzeitiger Genauigkeitsverschlechterung ein Zahnbruch eintritt.

6. Einfluß des Eingriffsteilungsfehlers auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung

In Kapitel 5 wurde der Einfluß der Zahnradfehler, besonders der Flankenformfehler auf die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars und auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung dargelegt. Im vorliegenden Kapitel wird der direkte Einfluß der Zahnradfehler auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung und die dynamische Flankenkraft betrachtet. D.h. im vorigen Kapitel wurde für die Zahnfußbeanspruchung

$$\sigma_d = S(x) \cdot K_{\alpha}(x) \cdot (X - e_{\alpha})$$

die Wirkung von x auf σ_d untersucht. x wird dabei durch die Art und Weise, wie sich e_{α} auf alle Zähne verteilt, stark beeinflusst. Hier handelt es sich nun um den direkten Einfluß von e_{α} auf σ_d . Zur Vereinfachung der Untersuchung und wegen der praktischen Wichtigkeit wurde der Eingriffsteilungsfehler als Kriterium für e_{α} genommen. Auf die Wirkung von andersartigen Zahnradfehlern als den Eingriffsteilungsfehlern soll nicht eingegangen werden, aber sie kann aus den überschlägigen theoretischen Erklärungen in diesem Kapitel entnommen werden.

6-1. Differenz zwischen den Eingriffsteilungen der beiden Zahnräder des Paares, und Berechnungsmethoden für die dynamische Zahnfußbeanspruchung

Auf Bild 35 berühren sich die Zähne P_1, P_2, \dots des Antriebszahnrades mit den Zähnen G_1, G_2, \dots des Abtriebszahnrades, und die Eingriffsteilungsfehler zwischen den Zähnen P_{i-1} und P_i sind mit $e_{r,i}$, und die zwischen den Zähnen G_{i-1} und G_i mit $e_{r,i}$ bezeichnet. $e_{r,i}$ und $e_{r,i}$ sind positiv, wenn die tatsächliche Eingriffsteilung größer ist als der theoretische Wert x_e . Bei dem Zahnepaar (i) ,

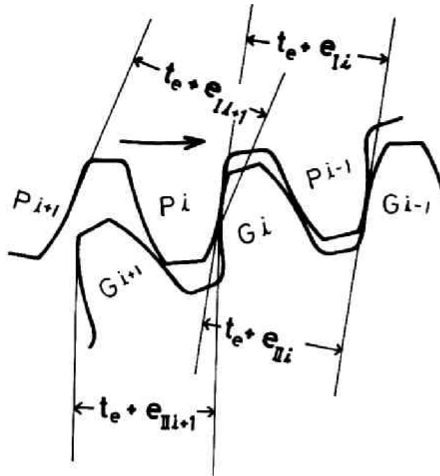


Bild 35. Eingriffsteilungen am Antriebs- und am Abtriebszahnrad

das die Zähne P_i und G_i umfaßt, ist die Differenz zwischen den Eingriffsteilungen des Antriebs- und Abtriebszahnades beim anlaufenden Doppel-eingriff und beim auslaufenden Doppel-eingriff

$$e_{(i)\oplus} = e_{x,i} - e_{x,i}$$

bezw.

$$e_{(i)\ominus} = e_{x,i+1} - e_{x,i+1}$$

und die Differenz zwischen den Eingriffsteilungen des Zahnepaares (i) ist

$$e_{(i)} = \{e_{(i)\oplus}, e_{(i)\ominus}\} \quad (1)$$

Für die Berechnung wurde ein Zahnräderpaarmodell verwendet, dessen Differenzen zwischen den Eingriffsteilungen sich nach je p Eingriffen wiederholen, gemäß Bild 36. Die Existenz solch einer Periodizität wurde als Bedingung für die Berechnung unterlegt.

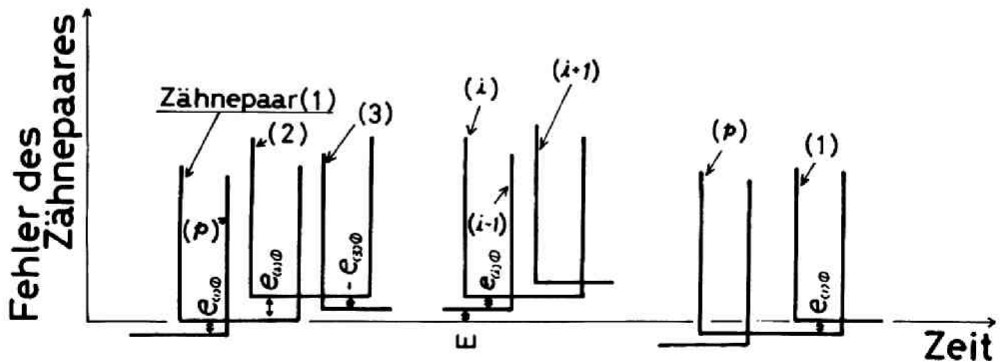


Bild 36. Eingriffsteilungsfehler, die sich nach p -maligen Eingriff wiederholen

6-2. Abtriebszahnrad

Bild 37 zeigt den errechneten Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen für ein getriebenes Zahnrad, das als Fehler nur Eingriffsteilungsfehler aufweist. Das Zahnräderpaar I, das für die Berechnung Verwendung fand, wurde dahin vereinfacht, daß nur vier verschiedene Differenzwerte zwischen den Eingriffsteilungen des Antriebs- und Abtriebszahnrades angegeben wurden, und mit dem Fortlaufen des Eingriffes des Zahnräderpaares sich die Eingriffsteilungsdifferenzen nach $\{-3,-2\}, \{-2,3\}, \{3,2\}, \{2,-3\}, \dots$ wiederholten. In diesem Fall also weist die Lösung der Gleichung (

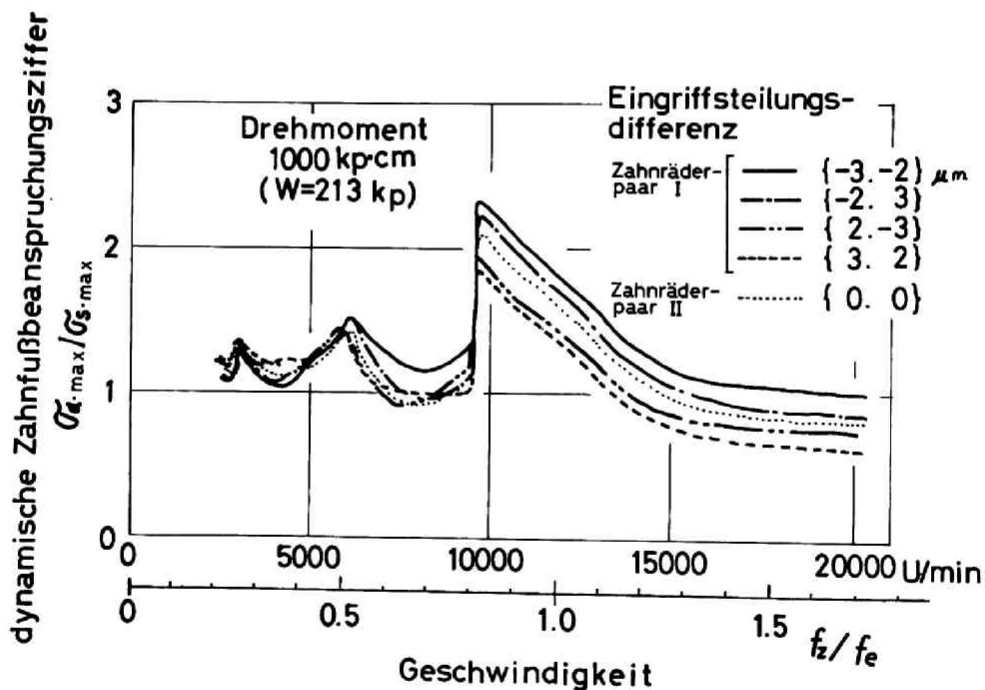


Bild 37. Einfluß der Differenz zwischen den Eingriffsteilungen auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung des Abtriebszahnrades (errechnete Ergebnisse)

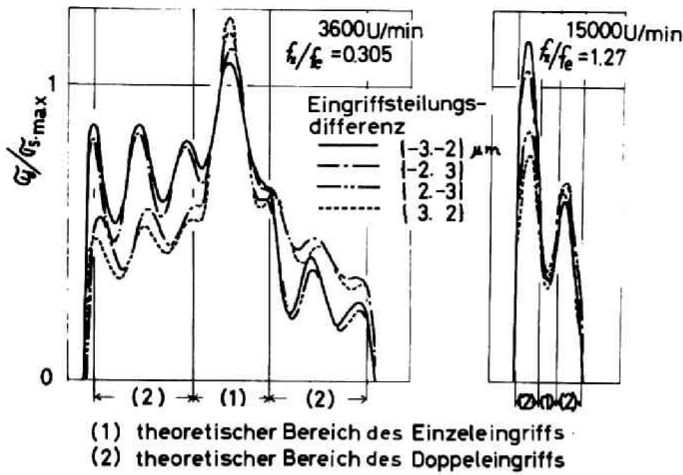


Bild 38. Einfluß der Differenz zwischen den Eingriffsteilungen auf den zeitlichen Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung des getriebenen Zahnrades (errechnet bei 1000 kp-cm)

eine Periodizität nach je vier Eingriffen des Zahnräderpaares auf. Die vier Kurven $\{-3,-2\}, \{-2,3\}, \{3,2\}, \{2,-3\}$ im Bild entsprechen den dynamischen Zahnfußbeanspruchungen der vier Zähne des Abtriebszahnrades. Im Bild wird, zum Vergleich, auch der Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen

bei einem fehlerfreien Abtriebszahnrad II gezeigt (Zeichnung $\{0,0\}$). Bei diesem Beispiel, wo die Differenzen der Eingriffsteilungen nicht groß sind, verändert sich im Bereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes für alle die mit verschieden großem Eingriffsteilungsfehler behafteten Zähne die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen nicht viel, nur ändert sich manchmal die Kurvenfolge mit der Geschwindigkeit. Die Beziehung zwischen der Größe der dynamischen Zahnfußbeanspruchung und der Eingriffsteilungsdifferenz kann nicht einfach ausgedrückt werden. Aber im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes entstehen klare Stufen, und je kleiner die Differenzen zwischen den Eingriffsteilungen Θ_0 am Anfang des Eingriffes sind (d.h. je kleiner die Eingriffsteilung des Abtriebszahnrades gegenüber der des Antriebszahnrades ist), desto weiter oben liegt die

Kurve. Bild 38 zeigt die errechneten Werte der dynamischen Zahnfußbeanspruchung eines Zahnes eines Abtriebszahnrades. Im Geschwindigkeitsbereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes (z.B. bei 3600 U/min im Bild) liegen die Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades in der Reihenfolge gemäß C_0 für die anlaufende Doppelengriffsstrecke und gemäß C_2 für die auslaufende Doppelengriffsstrecke, doch über die Einzeleingriffsstrecke fehlt eine bestimmte Beziehung zwischen den Zahnfußbeanspruchungen und den Eingriffsteilungsdifferenzen, da hier die Umfangsschwingungen durch die Anfangsbedingungen am Beginn des Eingriffes, die eine bestimmte Beziehung zwischen der Phase der Umfangsschwingungen und der zeitlichen Verlaufs der Zahnfederhärte voraussetzen, in großem Maß beeinflusst werden. Die höchste Spitze tritt in der Einzeleingriffsstrecke auf. Deshalb gibt es im Bereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes keine klare Beziehung zwischen dem höchsten Wert der dynamischen Zahnfußbeanspruchung und der Differenz zwischen den Eingriffsteilungen. Aber bei Geschwindigkeiten oberhalb des Hauptresonanzpunktes (z.B. bei 15000 U/min im Bild) erscheint die höchste Spitze in der anlaufenden Doppelengriffsstrecke, deshalb stimmt die Höhe der Spitzen mit der C_0 -Reihenfolge überein.

Bild 39 zeigt die gemessenen Differenzen zwischen den Eingriffsteilungen des Präzisions-Zahnradpaars, das zur Messung des Einflusses der Eingriffsteilungsdifferenzen auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung (siehe Bild 40) verwendet wurde. Die Zahnfußbeanspruchungen wurden an den aufeinanderfolgenden acht Zahnpaaren (25), (1), ..., (7) gemessen. Bild 40 zeigt die Meßergebnisse für das Abtriebszahnrad. Man sieht, daß sich im Bereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes für alle Zähne, obwohl deren Eingriffsteilungsfehler an Größe verschieden sind, die Höhe der maximalen dynamischen Zahnfußbeanspruchung nicht viel variiert, und sich nur manchmal die Kurvenfolge mit

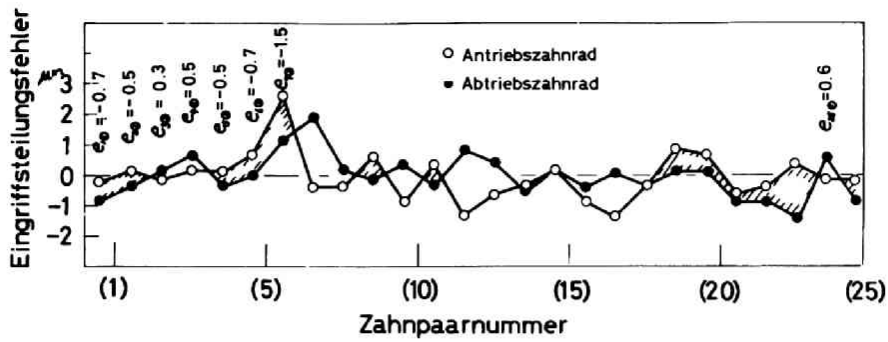


Bild 39. Eingreif.Zähnepaar und Differenzen zwischen den Eingriffsteilungen des Prüfzahnräderpaares

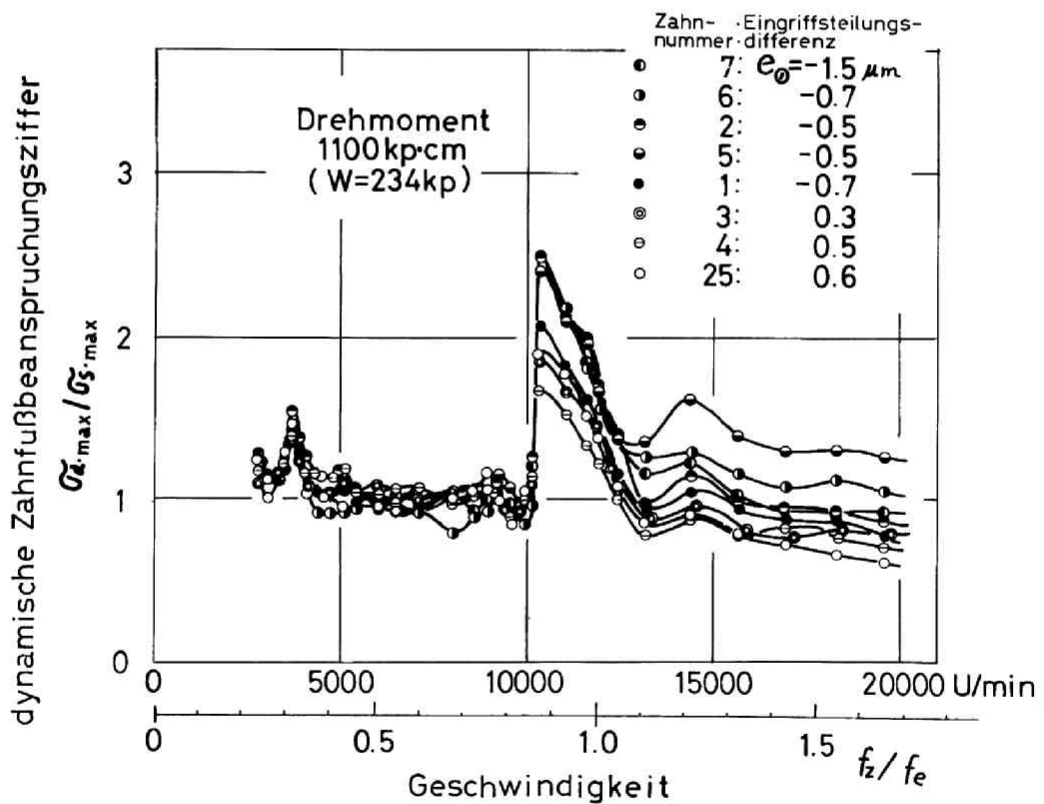


Bild 40. Meßergebnisse des Einflusses der Differenzen zwischen den Eingriffsteilungen auf die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades

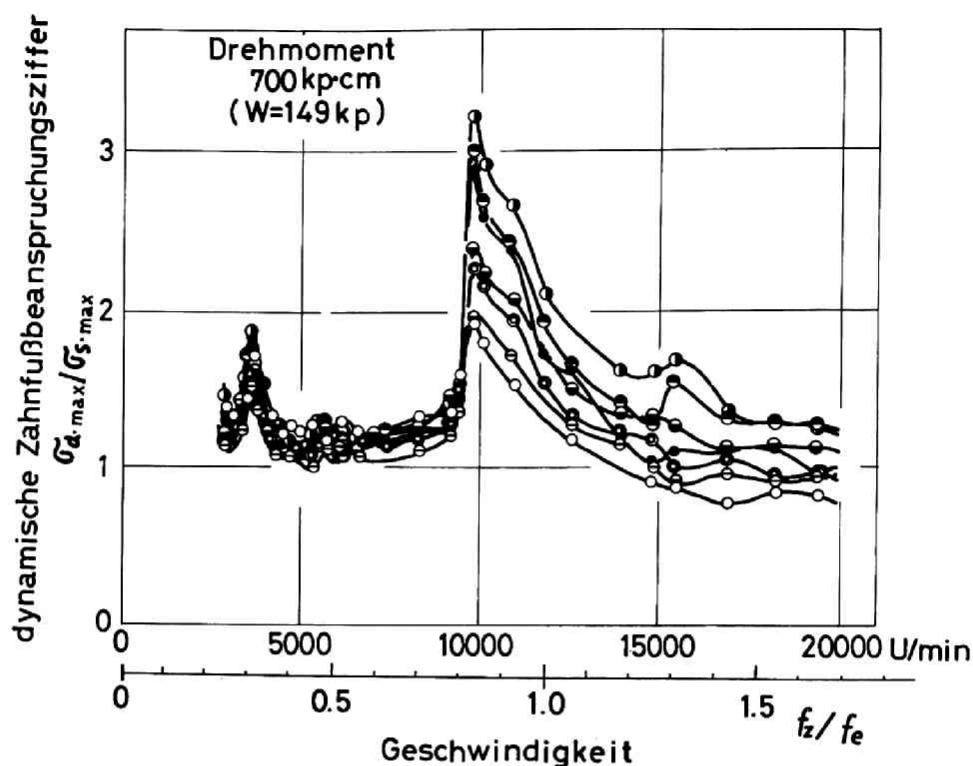


Bild 41. Verschieden starke Zahnfußbeanspruchungen bei mehreren Zähnen eines Abtriebszahnrades

der Geschwindigkeit ändert, aber im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes die Höhe der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen für die einzelnen Zähne eine klar gestufte Reihe bildet. Bei der Messung hatte das Prüfzahnradpaar außer dem Teilungsfehler sicher einige Zahnfehler, also stimmt im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes die Reihenfolge der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen für die einzelnen Zähne mit der gemessenen Anordnung der Eingriffsteilungsdifferenzen nicht ganz überein, aber sie tendiert auf eine e_0 -Ordnung hin. Die Abhängigkeit der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades

von der Betriebsgeschwindigkeit stimmt im Großen sehr gut mit den Berechnungsergebnissen, Bild 37, überein. Bild 41 zeigt die Zahnfußbeanspruchungen der sieben Zähne eines anderen Abtriebszahnrades. Die Kurven weisen auf dasselbe Verhalten hin wie bei Bild 40. Die beiden Zahnradpaare, die nach Bild 40, 41 verwendet wurden, waren sehr genau hergestellte, NAAG-geschliffene JIS 0 Grad-Verzahnungen. Aber im Betriebsgeschwindigkeitsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes wiesen, wegen der kleinen Teilungsfehler, die Werte der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen für die einzelnen Zähne

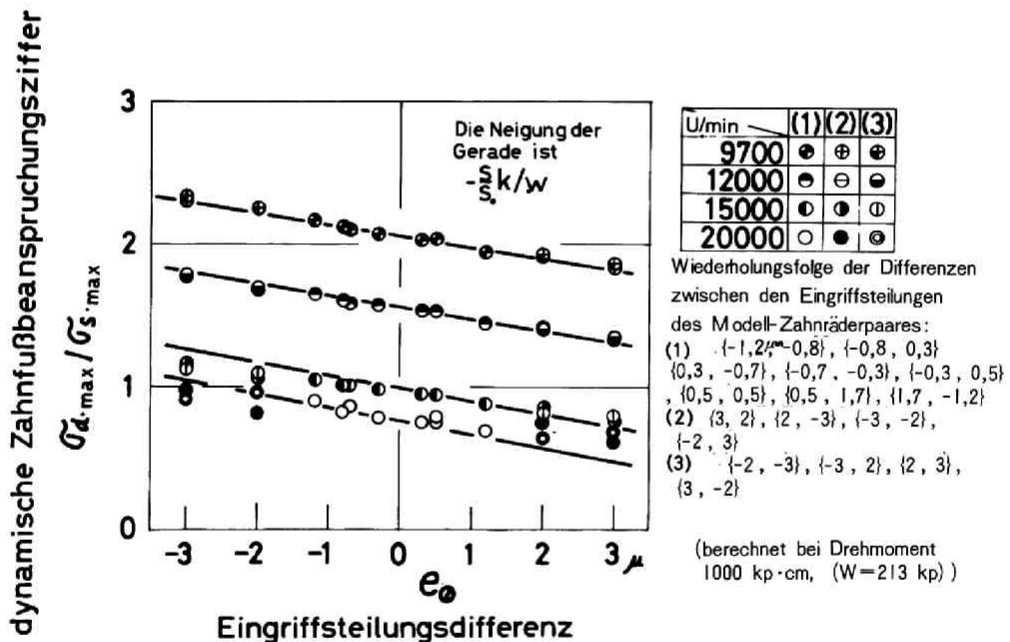


Bild 42. Verhältnis der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen bei getriebenem Zahnrad, das mit Geschwindigkeit oberhalb des Hauptresonanzpunktes läuft, zu den Differenzen der Eingriffsteilungen am anlaufenden Doppelengriff

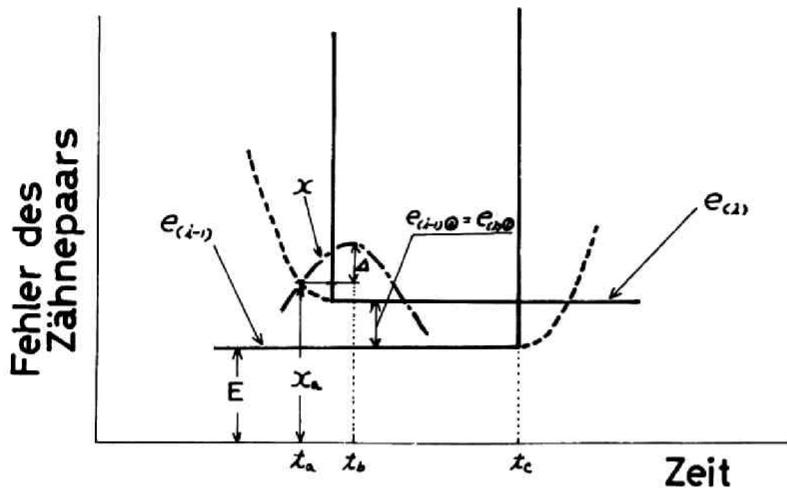


Bild 43. Einfluß der Eingriffsteilungsfehler über die Doppelengriffsstrecke auf den Eingriff des Zahnradpaares

starke
Differenzen
auf.

Bild 42 zeigt die errechnete Beziehung der maximalen dynamischen Zahnfußbeanspruchung des Abtriebszahnrades im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes in Abhängigkeit von den Eingriffsteilungsdifferenzen in der anlaufenden Doppelengriffsstrecke. Die Berechnung wurde mit drei Zahnradpaaren für vier Betriebsgeschwin-

digkeiten durchgeführt. Bei dem einen Zahnradpaar wiederholten sich die Eingriffsteilungsdifferenzen nach je acht Eingriffen und bei den anderen zwei Paaren nach vier Eingriffen. Man sieht, daß zwischen $\sigma_{d,max}/\sigma_{s,max}$ und e_0 die Beziehung besteht:

$$\frac{\sigma_{d,max}}{\sigma_{s,max}} = \left(\frac{\sigma_{d,max}}{\sigma_{s,max}} \right)_{e_0=0} - C_f \cdot e_0 \quad (11)$$

C_f : Konstante

Der Wert von C_f kann begrifflich wie folgt definiert werden: Da die höchste Spitze der dynamischen Zahnfußbeanspruchung des Abtriebszahnrades, das mit Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit läuft, in der anlaufenden Doppeleingriffsstrecke auftritt, genügt es, nur das Zähnepaar (i) nach Bild 43 zu betrachten. Der Eingriff des Zähnepaares (i) beginnt, wo X gleich dem Zahnfehler (hier nicht nur Flankenformfehler, sondern auch Teilungsfehler) wird, vgl. Bild 12. Diese Zeit wird als t_a und X als X_a bezeichnet. Zur Zeit t_b erreicht die Zahnfußbeanspruchung den höchsten Wert. Die dynamische Beanspruchung am Zahnfuß wird aus Gleichung (7) für $e_{\omega 0} = 0$ berechnet:

$$\sigma_{d, \max} = S(t'_b) \cdot k_{\omega}(t'_b) \cdot (X_a + \Delta' - E) \quad (12)$$

und für das Zähnepaar mit der Eingriffsteilungsdifferenz $e_{\omega 0}$ ist sie:

$$\sigma_{d, \max} = S(t_b) \cdot k_{\omega}(t_b) \cdot (X_a + \Delta - E - e_{\omega 0}) \quad (13)$$

dabei ist Δ die Zunahme von X in $(t_b - t_a)$, und das Zeichen ' zeigt den Wert für $e_{\omega 0} = 0$. Im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes wird die Bewegungsamplitude von X mit zunehmender Geschwindigkeit kleiner, gemäß Gleichung (1), und $(t_b - t_a)$ ist um ein Vielfaches kleiner als die Berührungszeit eines Zahnes. Deshalb ist anzunehmen, daß $X_a + \Delta' \approx X_a + \Delta$, $S(t'_b) \approx S(t_b)$, $k_{\omega}(t'_b) \approx k_{\omega}(t_b)$. Die maximale statische Zahnfußbeanspruchung $\sigma_{s, \max}$ ist

$$\sigma_{s, \max} = S \cdot W \quad (14)$$

, dabei ist S der Einfluß-Koeffizient für die Zahnfußbeanspruchung am Anfang des Einzeleingriffes ($t = t_c$). Aus Gleichung (12), (13) und (14) ergibt sich

$$\frac{\sigma_{d,max}}{\sigma_{s,max}} = \left(\frac{\sigma_{d,max}}{\sigma_{s,max}} \right)_{e_0=0} - \frac{S(t_b) \cdot k_{\omega}(t_b)}{S_0 \cdot W} e_0 \quad (15)$$

Bei einem Vergleich zwischen Gleichung (11) und Gleichung (15) bekommt man für

$$C_f = \frac{S(t_b) \cdot k_{\omega}(t_b)}{S_0 \cdot W}$$

Der Wert stimmt mit der genauen Berechnung nach Gleichung (1) überein, Bild 42. Damit ist bewiesen, daß der Einfluß des Eingriffsteilungsfehlers auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung des Abtriebszahnrades durch Gleichung (15) berechnet werden kann. Aber im sehr hohen Geschwindigkeitsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes bekommt die vorausgehende Eingriffsteilungsdifferenz, z.B. $e_{(i-\omega)}$ für das Zähnpaar (1), Einfluß auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung. Damit ändert sich deren Größe, auch wenn die Eingriffsteilungsdifferenzen $e_{\omega,0}$ verschieden sind. Unter besagter Geschwindigkeit nimmt die Zahnfußbeanspruchung mit zunehmender Eingriffsteilungsdifferenz des vorausgehenden Zähnpaares zu.

Aus der oben erwähnten allgemeinen Erklärung ergibt sich, daß der direkte Einfluß von andersartigen Zahnfehlern auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung des mit Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit laufenden Abtriebszahnrades mittels der Differenz zwischen den Zahnfehlern des Antriebs- und des Abtriebszahnrades zu dem Zeitpunkt, in dem die dynamische Zahnfußbeanspruchung am höchsten ist, nach Gleichung (15) berechnet werden kann.

Bild 44 zeigt den errechneten Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades, das relativ große Eingriffsteilungsdifferenzen, $\{-9,-4\}$, $\{-4,5\}$, $\{5,8\}$, $\{8,-9\}$, ... aufweist. Die Beziehung zwischen der dynamischen

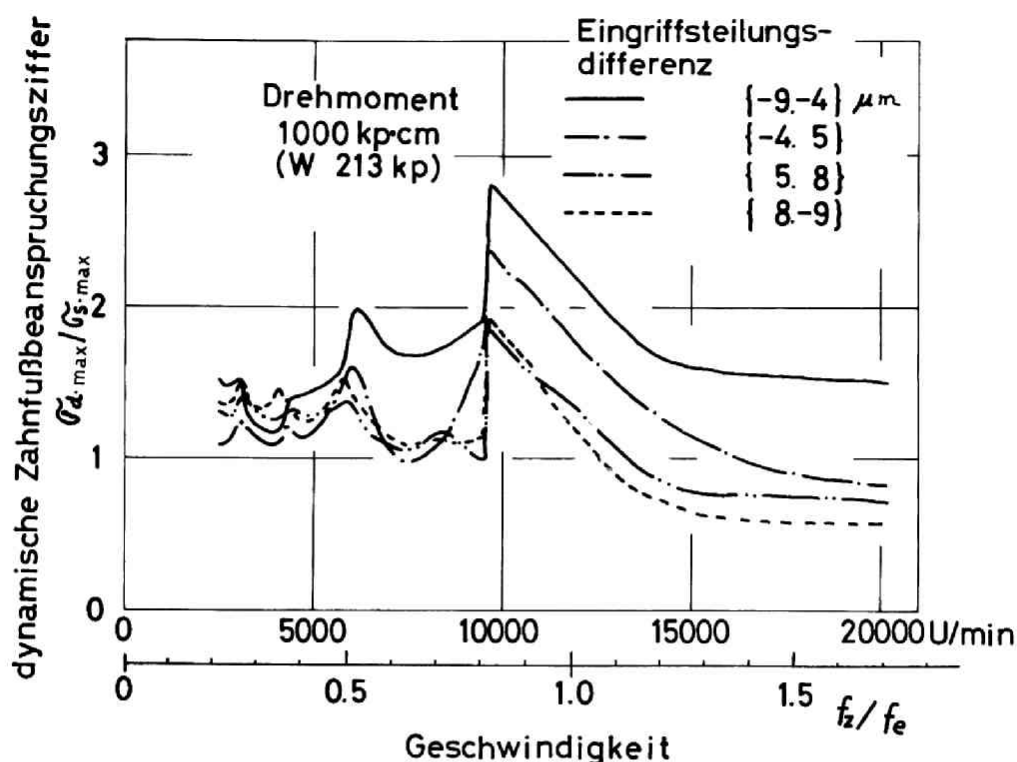


Bild 44. Einfluß der verhältnismäßig großen Differenzwerte der Eingriffsteilungen auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung beim Abtriebszahnrad (errechnete Ergebnisse)

Zahnfußbeanspruchung und der Eingriffsteilungsdifferenz e_0 verliert, wenn e_0 verhältnismäßig groß ist, ihre Linearität von Gleichung (15). Doch ist im Bereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes dieselbe Tendenz herrschend, nämlich, daß die dynamische Zahnfußbeanspruchung desto größer wird, je größer der absolute Wert von e_0 in negativer Richtung wird. Wenn der Wert der Eingriffsteilungsdifferenz e_0 stark negativ ist, weist die dynamische Zahnfußbeanspruchung des Zahnes einen sehr hohen Wert auf, auch im Bereich unterhalb des Hauptresonanzpunktes. Damit bestätigt

sich, daß eine der Hauptursachen für die Beanspruchungsstreuung an den Zahnfüßen des Abtriebszahnrades die Differenz zwischen den Eingriffsteilungen ist.

Dieses Verhalten der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen bei Abtriebszahnradern, nämlich daß diese im Geschwindigkeitsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes in

e_0 -Ordnung auftreten, stimmt mit dem Verhalten der auf einen Zahn wirkenden dynamischen Flankenkraft überein. Diese Tatsache wurde durch theoretische Schätzungen und Berechnungen gefunden, und auch aus dem gemessenen zeitlichen Zahnfußbeanspruchungsverlauf bei einem Zahn des Abtriebszahnrades ermittelt. Es traten dabei die einzelnen Höchstwerte bei den Zähnen, die verschiedene Eingriffsteilungsdifferenzen hatten, fast zur gleichen Zeit nach Beginn des Eingriffs auf.

6-3. Antriebszahnrad

Bild 45 zeigt den errechneten Verlauf der maximalen dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Antriebszahnrades des Zahnradpaarmodells mit kleinen Eingriffsteilungsdifferenzen. Diese wiederholten sich je vier Eingriffen in der Reihenfolge $\{-2,-3\}, \{-3,2\}, \{2,3\}, \{3,-2\}, \dots$. Bei einem Antriebszahnrad, das mit Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit lief, veränderten sich die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen in der Größe wenig. Und im noch höheren Geschwindigkeitsbereich, wo die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen für die einzelnen Zähne etwas verschiedene Größen aufwiesen, konnte keine bestimmte Beziehung zwischen den dynamischen Zahnfußbeanspruchungen und den Eingriffsteilungsdifferenzen hergestellt werden. Die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Antriebszahnrades verhielten sich hier verschieden von

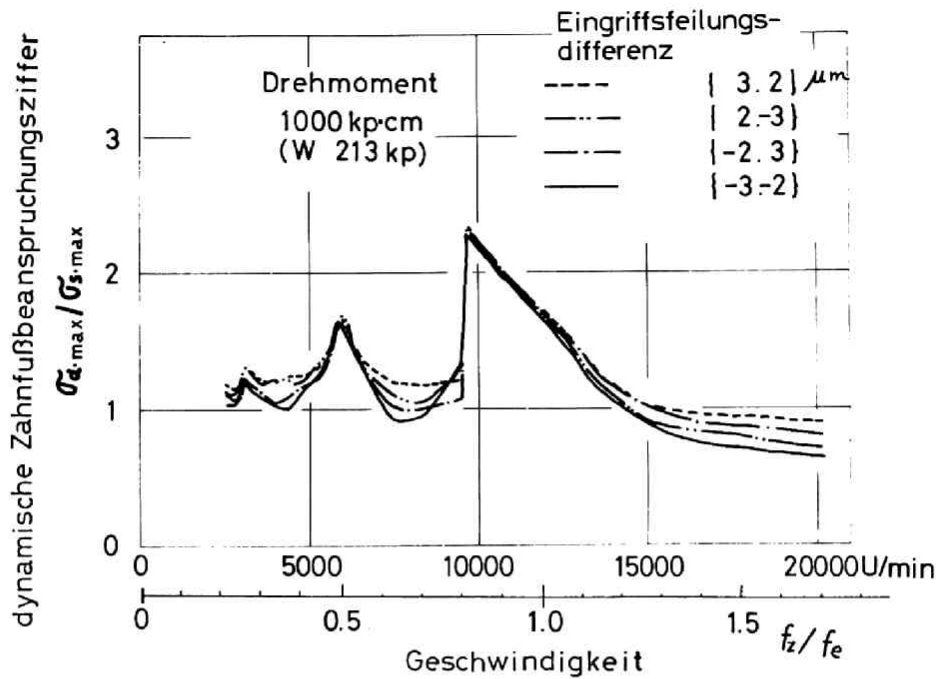
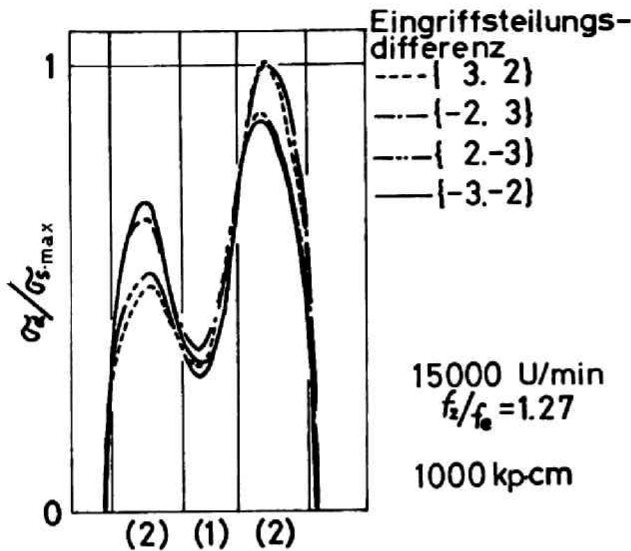


Bild 45. Einfluß der Differenz zwischen den Eingriffsteilungen auf dynamische Zahnfußbeanspruchung beim Antriebszahnrad (Rechnungsergebnisse)

denen des Abtriebszahnrades, vergleiche Bild 37. Der Grund warum zwischen der maximalen Größe der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen und den Eingriffsteilungsdifferenzen beim Antriebszahnrad keine klare Beziehung besteht, ist wie folgt: Bild 46 zeigt ein Beispiel des errechneten zeitlichen Verlaufs der dynamischen Zahnfußbeanspruchung für ein Antriebszahnrad. Das in der Berechnung verwendete Zahnräderpaarmodell ist dasselbe, wie in Bild 45. Der höchste Wert der dynamischen Zahnfußbeanspruchung des Antriebszahnrades tritt in der auslaufenden Doppelingriffsstrecke auf, und er erfährt eine doppelte



(2) Theoretischer Bereich des Einzeleingriffs
(1) Theoretischer Bereich des Doppeleingriffs

Bild 46. Einfluß der Differenz zwischen den Eingriffsteilungen auf den zeitlichen Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung des Antriebszahnrades

Beeinflussung durch die Eingriffsteilungsdifferenzen über die auslaufende und die anlaufende Doppeleingriffsstrecke, e_0 bzw. e_0 , da hier der Einfluß von e_0 auf die Umfangsschwingungen nicht genügend gedämpft ist.

Warum die Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades durch die Eingriffsteilungsdifferenzen in verschiedenen Höhen verlaufen, nicht aber die

des Antriebszahnrades, wird wie folgt erklärt: Beim Antriebszahnrad, das keine so großen Eingriffsteilungsfehler aufweist, entsteht, wenn es mit Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit läuft, die höchste Spitze der dynamischen Zahnfußbeanspruchung in der ablaufenden Doppeleingriffsstrecke, deshalb kann man für das Antriebszahnrad das Zähnpaar (i-1) nach Bild 43 verwenden. In der Zeit, wo die Zahnfußbeanspruchung ihren höchsten Wert erreicht, wird sie beim Antriebszahnrad für $e_{i-1,0} = 0$:

$$S_i(t_b) \cdot R_{(i-1)}(t_b) \cdot (X_a + \Delta' - E)$$

und für das Zahnradpaar mit der Eingriffsteilungsdifferenz $e_{(i-1)2}$

$$S_1(t_b) \cdot k_{(i-1)}(t_b) \cdot (x_a + \Delta - E)$$

dabei steht der Index 1 für Antriebszahnrad, die übrigen Zeichen siehe Gleichung (12), (13). Da gemäß Gleichung (1) $x_a + \Delta'$ mit $x_a + \Delta$, $S_1(t_b')$ mit $S_1(t_b)$, und $k_{(i-1)}(t_b')$ mit $k_{(i-1)}(t_b)$ fast übereinstimmt, ist die Zunahme der Zahnfußbeanspruchung $\delta\sigma_a$ durch die Eingriffsteilungsdifferenzen fast Null, d.h.

$$\delta\sigma_a \approx 0 \quad (16)$$

Beim Abtriebszahnrad ist die Zunahme nach demselben Verfahren aus Gleichung (12) und (13)

$$\delta\sigma_a \approx - S(t_b) \cdot k_{(i)}(t_b) \cdot e_{\omega 0} \quad (17)$$

Ein Vergleich zwischen Gleichung (16) und Gleichung (17) zeigt, daß die höchsten Werte der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades durch die Eingriffsteilungsdifferenzen stark beeinflußt werden, die des Antriebszahnrades jedoch nur geringfügig.

Bild 47 zeigt als Beweis den Verlauf der ersteren nach der Messung unter Einfluß der Eingriffsteilungsdifferenzen. Bei der Messung lief das in Bild 40 benutzte Zahnradpaar umgekehrt, und zwar so, daß sich dieselben Zahnflanken berührten und an denselben Zahnfüßen gemessen wurde. Die Eingriffsteilungsdifferenzen des Zahnradpaares, an dem die Messung erfolgte, werden im Bild 39 gezeigt. Aus einem Vergleich zwischen Bild 40 und Bild 47 ersieht man, daß der Streuungsbereich der dynamischen Zahnfußbeanspruchungsziffern ($\sigma_{d,max}/\sigma_{s,max}$) des Antriebszahnrades ziemlich viel schmaler ist, als der des Abtriebszahnrades, d.h. bei 10500 U/min ist er 0,56 für das Antriebszahnrad und 0,91 für das Abtriebszahnrad, bei 12000 U/min 0,23 und 0,46, bei 15000 U/min 0,49 und 0,68, bei 20000 U/min 0,55 und 0,77.

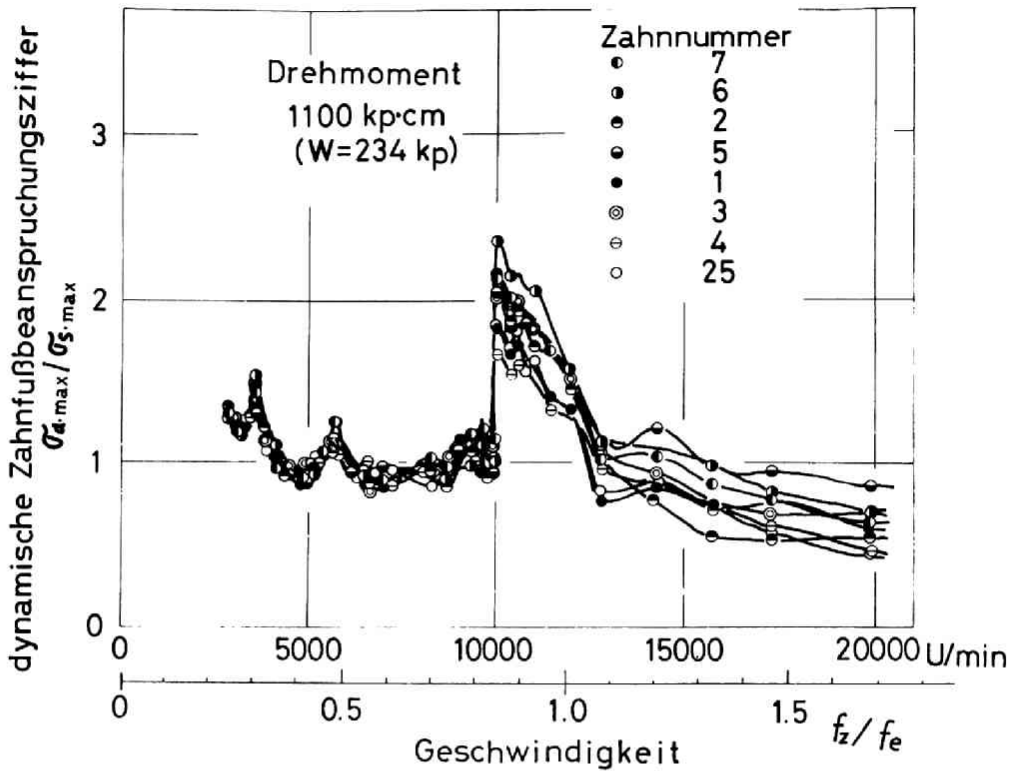


Bild 47. Meßergebnis des Einflusses der Differenzen zwischen den Eingriffsteilungen auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung beim Antriebszahnrad

Damit ist bestätigt, daß die maximale dynamische Zahnfußbeanspruchung beim Antriebszahnrad durch die Eingriffsteilungsdifferenzen weniger beeinflußt wird, als beim Abtriebszahnrad, was mit den oben erwähnten theoretischen Ergebnissen gut übereinstimmt.

7. Einfluß des Summenteilungsfehlers* auf die dynamische Belastung im Hochgeschwindigkeitsbetrieb

Um theoretisch den Einfluß von Einzelteilungsfehlern* auszuschalten, wurde ein Zahnradpaar mit unendlich großer Zähnezahl, und einem unendlich klein Teilungssprung*, nur mit einem Summenteilungsfehler von $a \cdot \sin \Omega \cdot t$, angenommen. Bei diesem Zahnradpaar wird die Eingriffsfrequenz f_z unendlich groß. Deshalb kann die Gesamtzahnfederhärte $k(x, x, e\omega)$ als eine Konstante K angenommen werden und die durch Fehler erzwungene Kraft $F(e\omega, k\omega)$ als $K \cdot a \cdot \sin \Omega \cdot t$. Die Gleichung für die Umfangsschwingungen des Zahnradpaares ist dann:

$$m \cdot \ddot{x} + 2 \zeta \sqrt{m \cdot K} \dot{x} + K \cdot x = W + K \cdot a \cdot \sin \Omega \cdot t \quad (18)$$

Die Lösung der Gleichung (18) für Betrieb mit konstanter Geschwindigkeit ist

$$x = \frac{a \cdot \sin(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \zeta \cdot \Omega}{\omega^2}\right)^2}} + \frac{W}{K}$$

dabei ist

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad , \quad \phi = \tau_g^{-1} \left(\frac{\frac{2 \zeta \cdot \Omega}{\omega^2}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right)$$

Die Zunahme ΔW der dynamischen Kraft durch der Summenteilungsfehler ist

$$\begin{aligned} \Delta W &= K \cdot (x - a \cdot \sin \Omega \cdot t) - W \\ &= K \cdot a \left[\frac{\sin(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \zeta \cdot \Omega}{\omega^2}\right)^2}} - \sin \Omega \cdot t \right] \end{aligned} \quad (19)$$

* "-teilung-" bedeutet hier die Eingriffsteilung.

Andererseits sind die Polar-Schwungmomente von Zahnrädern von Einheitsbreite

$$J_I = r_{gI}^2 m_I = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot r_{oI}^4, \quad J_{II} = r_{gII}^2 m_{II} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot r_{oII}^4,$$

dann ist

$$m = C_m \frac{r_{oI}^2}{1 + \left(\frac{Z_I}{Z_{II}}\right)^2}$$

dabei ist

$$C_m = \frac{\pi \rho}{2 \cdot \cos^2 \alpha} \approx 1,42 \times 10^{-10} \quad \text{kp} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^3$$

ρ : spezifisches Gewicht des Stahls $8,01 \times 10^{-10} \text{ kp} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^3$

α : Eingriffswinkel 20 Grad

r_{oI} : Teilkreisradius des Ritzels

Z_I/Z_{II} : Übersetzung

Der denkbar kleinste Wert von K ist ungefähr $1,0 \times 10^3 \text{ kp/mm/mm}$ für Einheitsbreite (entsprechend einem Zahnräderpaar von $Z_I/Z_{II}=20/20$, $\varepsilon=1,1$).

Nun wird angenommen, daß der Summenteilungsfehler dieselbe Periode wie die Umdrehung aufweist, nämlich $\Omega = V/r_{oI}$, dabei ist V : Umfangsgeschwindigkeit auf dem Wälzkreis.

Dann ist

$$\frac{\Omega}{\omega} < 11,9 \times 10^{-7} \times V$$

und

$$\frac{\frac{2 \cdot \zeta \cdot \Omega}{\omega^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} < 3 \times 10^{-8} \times r_{oI}$$

In allgemeinen ist

$$\frac{\frac{2 \cdot \zeta \cdot \Omega}{\omega^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} < < 1 \quad (20)$$

dann

$$\phi \approx 0 \quad , \quad \frac{2,3 \cdot \Omega}{\omega^2} \ll 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \quad (21)$$

Aus Gleichungen (19), (20) und (21)

$$\Delta W < K \cdot a \cdot \frac{\frac{\Omega^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

Da $K \cdot a \cdot (\Omega/\omega)^2 / (1 - \Omega^2/\omega^2)$ mit zunehmendem Wert von K fortlaufend kleiner wird, ist der maximale Wert von ΔW_{\max} :

$$\Delta W_{\max} < \frac{a \times 10^3}{\left(\frac{840000}{V}\right)^2 - 1} \quad \text{kp/mm} \quad (22)$$

In allgemeinen ist der Wert der Gleichung (22) sehr klein. Also sieht man, daß die Wirkung des Summenteilungsfehlers auf die dynamische Belastung sehr gering ist, so lange man nur das Zahnradpaarsystem selbst im Auge hat. Um aber allgemein die Vergrößerung der dynamischen Belastung durch den Summenteilungsfehler zu berechnen, muß man die durch die vom Summenteilungsfehler der Zahnräder erzwungenen Drehschwingungen des Zahnrad-Achsen-Systems in die Untersuchung miteinbeziehen. Und es ist auch denkbar, daß die erzwungenen Drehschwingungen das ganze Getriebe oder die Geräteanlage in Schwingung versetzen, wobei rückwirkend ein Einfluß auf die Umfangsschwingungen des Zahnradpaars stattfindet.

8. Der durch die dynamische Flankenkraft verursachte Anpreßdruck bei Geradverzahnung

Der im Berührungspunkt auftretende maximale Anpreßdruck σ_H (Hertz'sche Beanspruchung) berechnet sich wie folgt:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F(t)}{\pi \cdot b \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \rho_r(t)}} \quad (23)$$

Dabei bedeuten:

$F(t)$ normale Kraft auf eine Zahnflanke

$\rho_r(t)$ relativer Krümmungs-Radius der Flanken $\rho_r(t) = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$

ρ_1, ρ_2 Krümmungs-Radien an den Berührungspunkten der Flanken von Rad bzw. Ritzel

b Zahnbreite

ν_1, ν_2 Poissonsche Zahl

E_1, E_2 Elastizitätsmoduln der Flankenwerkstoffe

Die Wirkung der Schmierung und der Flankenreibung werden außer Acht gelassen. Da der Flankenwerkstoff bei Leistungsübertragungs-Geradverzahnungen im allgemeinen Stahl ist, sind $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kp/mm}^2$ und die Gleichung (23) wird zu

$$\sigma_H = 60,57 \sqrt{\frac{F(t)}{b \rho_r(t)}} \quad (24)$$

Aus Gleichungen (24) und (6) erhält man

$$\sigma_H = 60,57 \sqrt{\frac{K(t, x, e_\omega) \cdot (x - e_\omega)}{b \rho_r(t)}} \quad (25)$$

Bild 48 zeigt die aus Gleichung (1) und (25) berechneten Ergebnisse für den Flanken-anpreßdruck σ_H an der Berührungsstelle der Zahnkopfkante bei Eingriffsbeginn und an dem Berührungspunkt, wo die maximale Normalkraft auf die Zahnflanke wirkt. Auf der Ordinate ist der dynamische

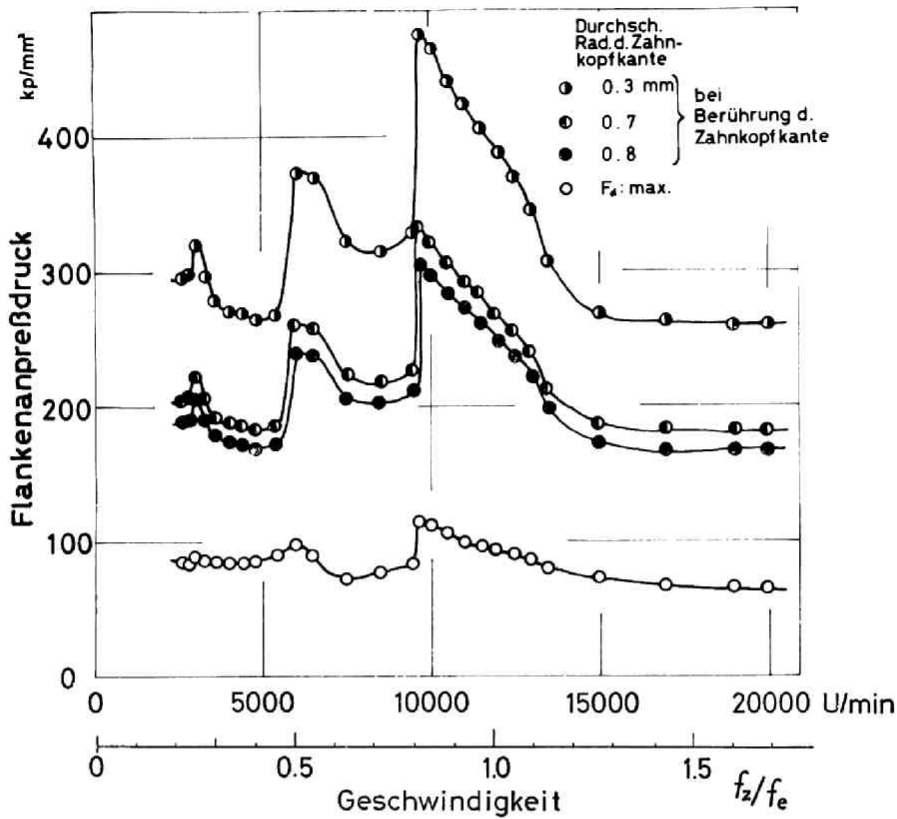


Bild 48. Berechneter Verlauf der durch die dynamische Flankenkraft verursachten Hertzschen Beanspruchung z.Z. der Zahnkopfkantenberührung und z.Z., wo die dynamische Flankenkraft ihren maximalen Wert annimmt.

Flanken-anpreßdruck aufgetragen: Die Abszisse gibt die Betriebsgeschwindigkeit wieder. Die Abmessungen des in der Berechnung verwendeten Zahnradpaares sind in Tafel 1 gegeben und die Berechnung wurde für ein Übertragungsdrehmoment von 1000 kp-cm durchgeführt. Aus dem Bild

kann man ersehen, daß der Flanken-anpreßdruck σ_n an der Berührungsstelle der Zahnkopfkante bei Eingriffsbeginn viel größer ist, als an dem Punkt, wo die maximale dynamische Normalflankenkraft wirkt, da erfahrungsgemäß der durchschnittliche Radius der Zahnkopfkante bei einem über längere Zeit verwendeten Zahnrad kaum größer ist als 0,8 mm. Der Flanken-anpreßdruck an der Berührungsstelle der Zahnkopfkante vergrößert sich ziemlich plötzlich am Resonanzpunkt und seine Zunahme ist größer als die Zunahme des Flanken-anpreßdrucks am Punkt maximaler Normalflankenkraft. Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse wird dadurch bestätigt, daß die Meßergebnisse für den zeitlichen Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen mit ihrem berechneten Verlauf $S(x) \cdot k(x, x, e_\omega) \cdot (x - e_\omega)$ übereinstimmen, Bild 27, da der dynamische Bestandteil des dynamischen Flanken-anpreßdrucks gleich dem der dynamischen Zahnfußbeanspruchung ist, i.e. $k(x, x, e_\omega) \cdot (x - e_\omega)$, siehe Gleichung (25).

In dieser Berechnung wird der Schmierfilm außer Acht gelassen und der maximale Flanken-anpreßdruck an der Berührungsstelle der Zahnkopfkante geht über die Tragfähigkeitsgrenze des Stahls hinaus. Diese Tatsache zeigt die Notwendigkeit und Bedeutung des Vorhandenseins eines Schmierfilms zwischen den Zahnflanken, der eine Lastverteilung auf diesen bewirkt. Man könnte deshalb daran denken, neue Zahnkopfformen zu entwickeln, die auch den Teil mit einbeziehen, der geometrisch außerhalb des Eingriffs liegt, um einen entsprechenden Schmierfilm sicherzustellen. Jedenfalls ist es notwendig, daß eine genügende Schmierstoffmenge zu den eingreifenden Flanken und zur Zahnkopfkante geliefert wird.

9. Schmiermethode und ihr Einfluß auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung (Dämpfungssteuerung bei Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars durch eine bestimmte Schmiermethode)

9-1. Einfluß des Dämpfungsfaktors auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung

Die praktischste und erfolgreichste Methode, Schwingungen zu schwächen, ist bekanntlich, die Dämpfung des Schwingungssystems zu verstärken. Auch die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars erfahren durch eine Dämpfungsverstärkung eine starke Schwächung.

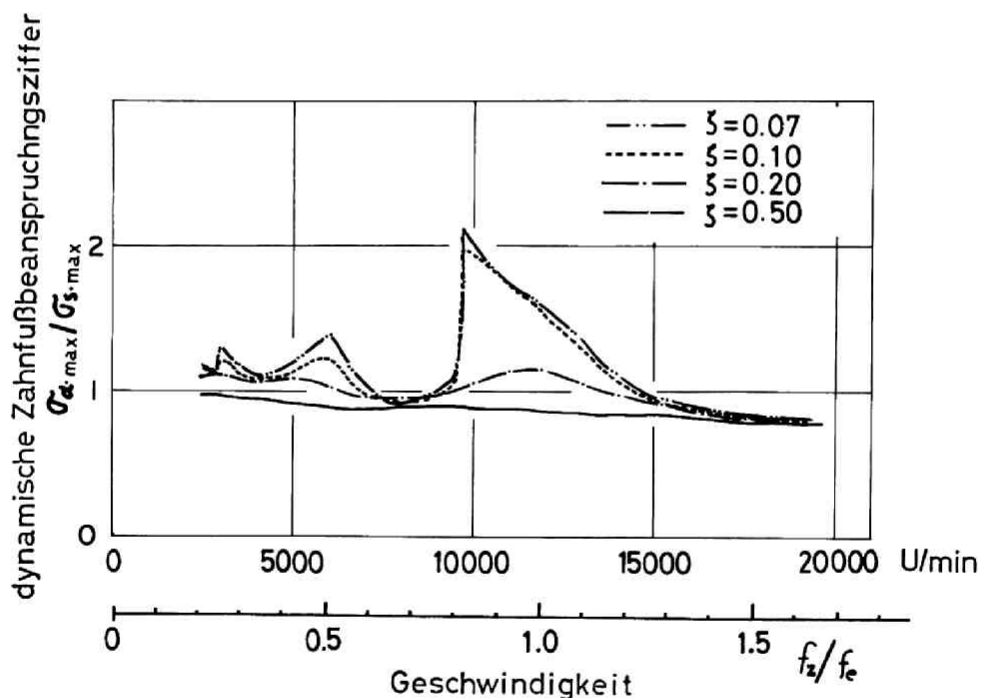


Bild 49. Einfluß des Dämpfungsfaktors auf den Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchung in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit (errechnet für Abtriebszahnrad unter 1000 kp·cm)

Bild 49 zeigt die Rechnungsergebnisse für die maximalen dynamischen Zahnfußbeanspruchungen beim Abtriebszahnrad in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit für die verschiedenen Werte des Dämpfungsfaktors ζ . Aus dem Bild ist ersichtlich, daß die Höhe der maximalen dynamischen Zahnfußbeanspruchung mit größerem Dämpfungsfaktor niedriger wird und die Resonanzpunkte verschwinden. Bild 50 zeigt bei einem Abtriebszahnrad die Änderung des zeitlichen Verlaufes der dynamischen Zahnfußbeanspruchung bei verschiedenem Dämpfungsfaktor. Mit größer werdendem Dämpfungsfaktor wird die Kurve glatter, damit wird die höchste Spitze niedriger. Man kann auch erkennen, daß die höchsten Spitzen der dynamischen Zahnfußbeanspruchung bei einer Betriebsgeschwindigkeit um den Hauptresonanzpunkt (9700 U/min), wo die Zahnflankenabtrennung bei geringer Dämpfung

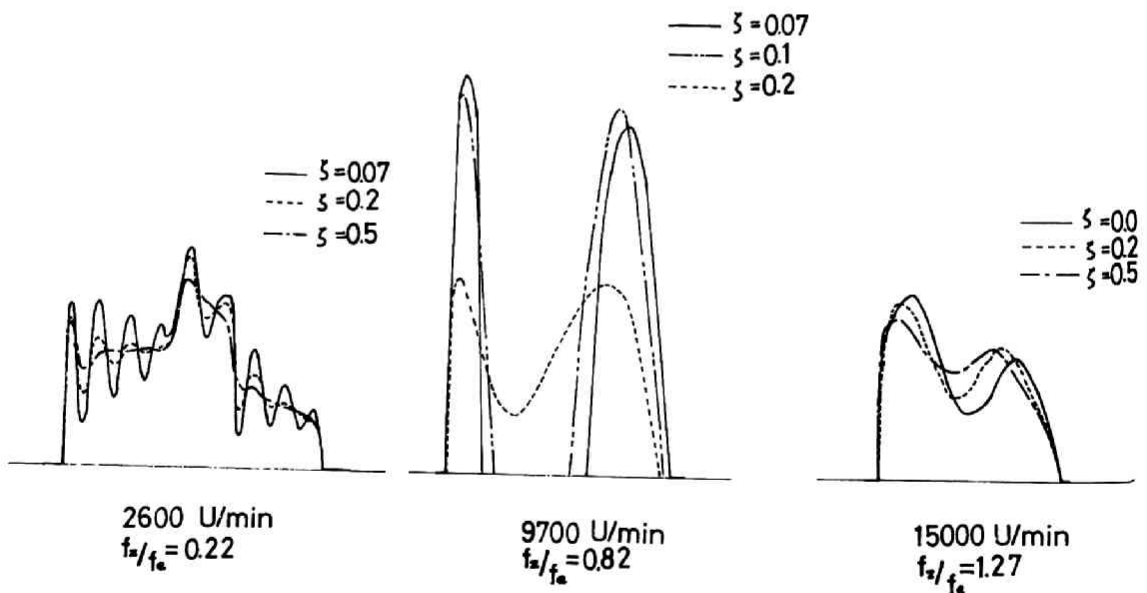


Bild 50. Änderung des zeitlichen Verlaufes der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen durch Dämpfungsfaktor ζ (errechnet für Abtriebszahnrad unter 1000 kp·cm)

der Umfangsschwingungen sehr stark wird, überaus klein werden, da die Zahnflankenabtrennung verschwindet, wenn der Dämpfungsfaktor groß genug ist. Bild 51 zeigt den Einfluß des Eingriffsteilungsfehlers auf die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen des Abtriebszahnrades bei Betrieb mit verhältnismäßig großem Dämpfungsfaktor. Das für die Berechnung verwendete Zahnradpaar ist dasselbe, wie in Bild 37, und die vier verschiedenen Differenzwerte zwischen den Eingriffsteilungen des Antriebs- und Abtriebszahnrades wiederholen sich mit dem Fortschreiten des Eingriffs des Zahnradpaares gemäß $\{-2,3\}, \{3,2\}, \{2,-3\}, \{-3,-2\}, \dots$. Die vier Kurven $\{-3,-2\}, \{-2,3\}, \{2,-3\}, \{3,2\}$ im Bild entsprechen

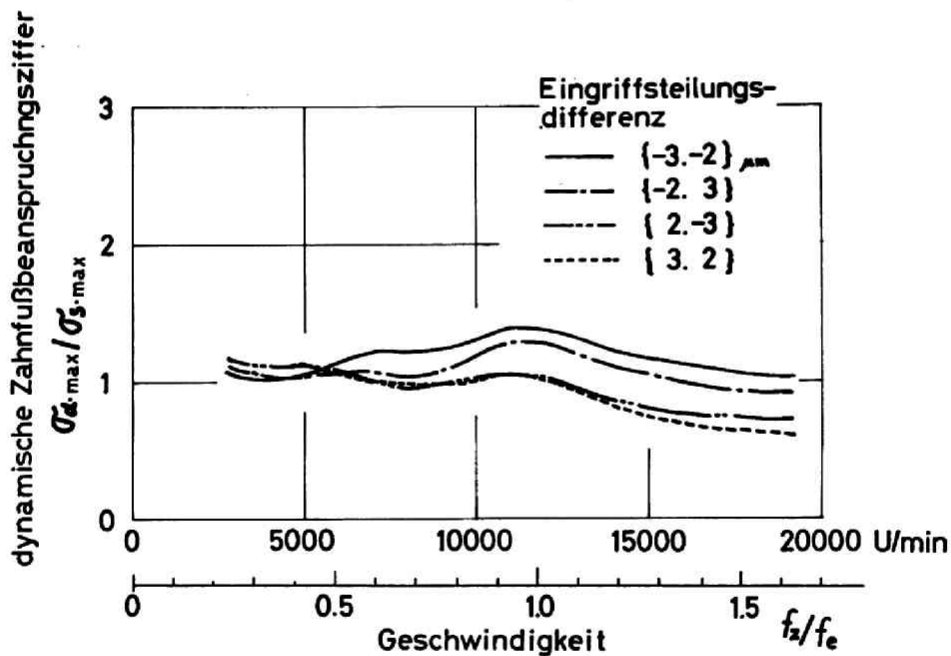


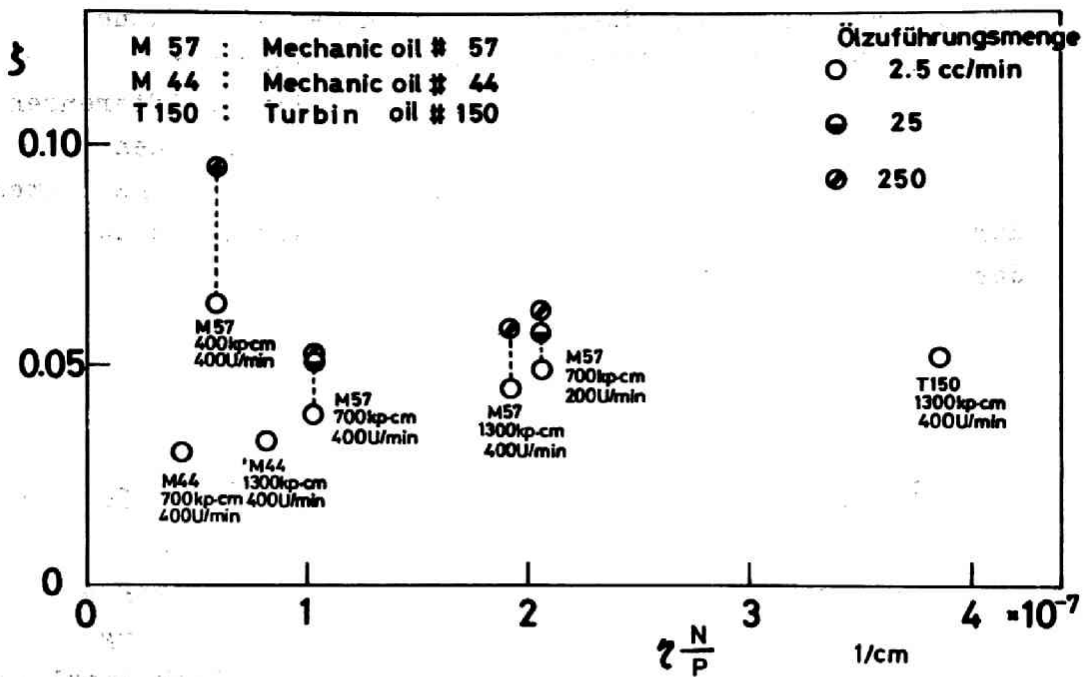
Bild 51. Einfluß der Eingriffsteilungsdifferenzen auf die dynamische Zahnfußbeanspruchung eines Abtriebszahnrades mit großem Dämpfungsfaktor $\xi=0,2$ (Rechnungsergebnis)

den dynamischen Zahnfußbeanspruchungen der vier Zähne. Wenn man Bild 51 mit Bild 37 vergleicht, kann man erkennen, daß der Einfluß der Eingriffsteilungsdifferenzen auf die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen bei hohen Betriebsgeschwindigkeiten oberhalb des Hauptresonanzpunktes durch den Dämpfungsfaktor kaum verändert wird, was aus der Erklärung unter 6-2 verständlich ist.

9-2. Bisherige Methoden zur Verstärkung der Dämpfung der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars

Die bisherigen Versuche, die Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars zu dämpfen, waren nicht wirksam genug. Für Leistungsübertragungszahnräder wird gewöhnlich Stahl als Werkstoff verwendet, und es ist nicht möglich, einen Werkstoff mit stärkerer Innendämpfung als Zahnrad-Material zu wählen. Außerdem sind die bisher veröffentlichten, etwas komplizierten Methoden zur Verringerung der Umfangsschwingungen des Zahnradpaars, wie z.B. der Einbau von Federn und Dämpfern in den Zahnradkörper, sehr unpraktisch, da die Herstellung des Zahnrades schwierig wird und damit die Herstellungskosten sehr hoch, und noch dazu die präzise Fabrikation der Zahnräder außerordentlich erschwert ist. Aus diesem Grund dürfte besagte Methode für Hochgeschwindigkeits-Zahnräder kaum verwendbar sein.

Bild 52 zeigt die Änderung des Dämpfungsfaktors durch Änderung von Ölzähigkeitsgrad und Öllieferung. Der Dämpfungsfaktor wurde aus der aufgezeichneten Kurve für die Beschleunigung der Umfangsschwingungen bei Geradverzahnung mit Modul 3 mm, Zähnezahl 36/36, Breite 10 mm bei sehr langsamer Betriebsgeschwindigkeit bestimmt.



ζ : Zähigkeitsgrad des Öls (kp·s/cm)
 N : Drehzahl (U/sek)
 P : Flankenkraft (kp/cm)

Bild 52. Änderung des Dämpfungsfaktors durch Ölsorte, Ölzuführungsmenge und Betriebsbedingungen (Meßergebnisse nach M.Fujimura und H.Fukuma)

Die Messung wurde mit einem anderen Zahnradprüfstand durchgeführt, wobei das Schmiermittel auf den Eingriffspunkt aufgetäufelt wurde. Aus dem Bild ersieht man, daß die Zunahme des Dämpfungsfaktors, wenn das Schmierstoff Mechanic-Oil #44 durch Turbin-Oil #150 ersetzt wird, etwa 0,02 beträgt, und, wenn die Schmierstoffmenge von 2,5 auf 250 cc/min vermehrt wird, bei etwa 0,01-0,03 liegt. Es scheint, daß eine solche Änderung des Dämpfungs-

faktors in der Tat fast keinen Einfluß auf die dynamische Belastung hat. Diese Folgerung wurde auch durch die Messungsergebnisse bestätigt, die auf dem Hochgeschwindigkeits-Zahnradprüfstand gewonnen wurden, nämlich, daß sich der zeitliche Verlauf, also die Kurvenform, der dynamischen Zahnfußbeanspruchung durch die Erhöhung des Ölzuführungsdruckes von 0,5 kp/cm auf 2,5 kp/cm und durch die Änderung der Schmierstoffsorte von Turbinenöl #90 in Turbinenöl #150 nicht änderte.

Eine weitere Möglichkeit wäre, die Drehreibung des Zahnrades zu vergrößern, was ebenfalls zu einer Verstärkung des Dämpfungsfaktors führen würde, aber eine stärkere Drehreibung wirkt sich in negativer Weise direkt auf den Leistungsverlust aus, und ist deshalb nicht zu empfehlen.

9-3. Zentrifugalschmierung bei Zahnrädern

Wenn der Ölfilm zwischen den im Eingriff befindlichen Zahnflanken verdickt werden könnte, so wurde angenommen, würde das wohl auch zu einer Verstärkung der Dämpfung und damit einer Verringerung der Umfangsschwingungen und der dynamischen Belastung führen. Zu diesem Zweck wurde eine besondere Schmiermethode für die Zahnräder entwickelt, eine Art Zentrifugalschmierung. Bild 53 zeigt das Schema und Aussehen des Zahnrades, an dem diese Schmierung erprobt wurde. Die Abmessungen des Zahnrades waren dieselben wie in Tafel 1, und durch Löcher an den Zahnfußflächen wurde der im Innern der Zahnräder enthaltene Schmierstoff mittels Zentrifugalkraft auf die Zahnflanken herausgedrückt. Bei der üblichen Düsenschmierung für Hochgeschwindigkeitsgetriebe, bei der sich die Ölspritzdüsen meistens auf der auslaufenden Seite des Eingriffs

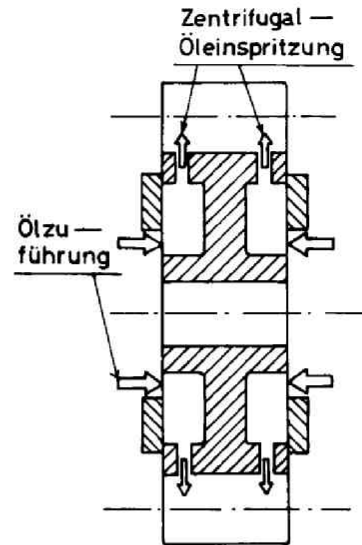
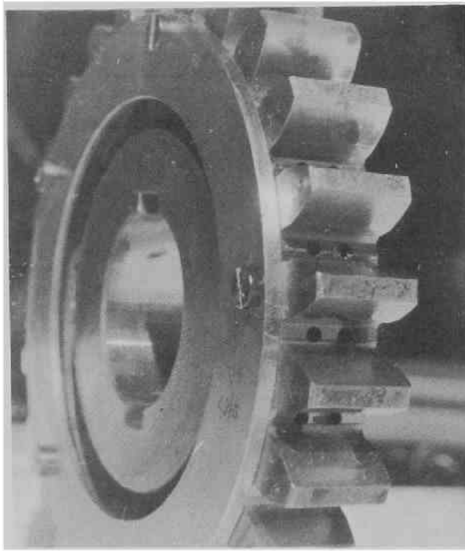


Bild 53. Äußeres Bild und Schema des Zahnrades mit Zentrifugalschmierung

befinden, wird die Schmierstoffmenge, die die Eingriffsflanken erreicht, mit zunehmender Betriebsgeschwindigkeit geringer, da die gerade im Auslauf befindlichen Zähne den Ölstrom von den eingreifenden Zahnflanken abhalten. Dadurch wird der Schmierungszustand lückenhaft, und wenn auch die Dicke des Ölfilms für die Schmierung selbst genügt, ist sie doch zu gering, um die Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares wirkungsvoll zu dämpfen. Aber bei der Zentrifugalschmierungsmethode nimmt im Gegenteil die auf die Zahnflanken gespritzte Schmierstoffmenge mit zunehmender Betriebsgeschwindigkeit zu, und auch zu den Zahnflanken im Eingriff wird Schmierstoff geliefert. Damit ist anzunehmen, daß der Ölfilm zwischen den Eingriffszahnflanken dicker wird, der Dämpfungsfaktor der Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares sich vergrößert, und demzufolge die Schwingungen und die dynamische Belastung sich abschwächen.

9-4. Einfluß der Schmiermethode auf die dynamische Belastung und Wirkung der Zentrifugalschmierung

Bild 54 zeigt die Meßergebnisse des zeitlichen Verlaufs der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen für drei verschiedene Öleinspritzmethoden: Düsensschmierung gegen den auslaufenden Eingriff Bild 3, Düsensschmierung auf der Eingriffsseite, Zentrifugalschmierung. Die Messung wurden mit demselben Zahnradpaar durchgeführt. Nach dem Versuch wurde keine Änderung in den Zahnflankenformen festgestellt. Bei der Düsensschmierung gegen den auslaufenden Eingriff zeigt die

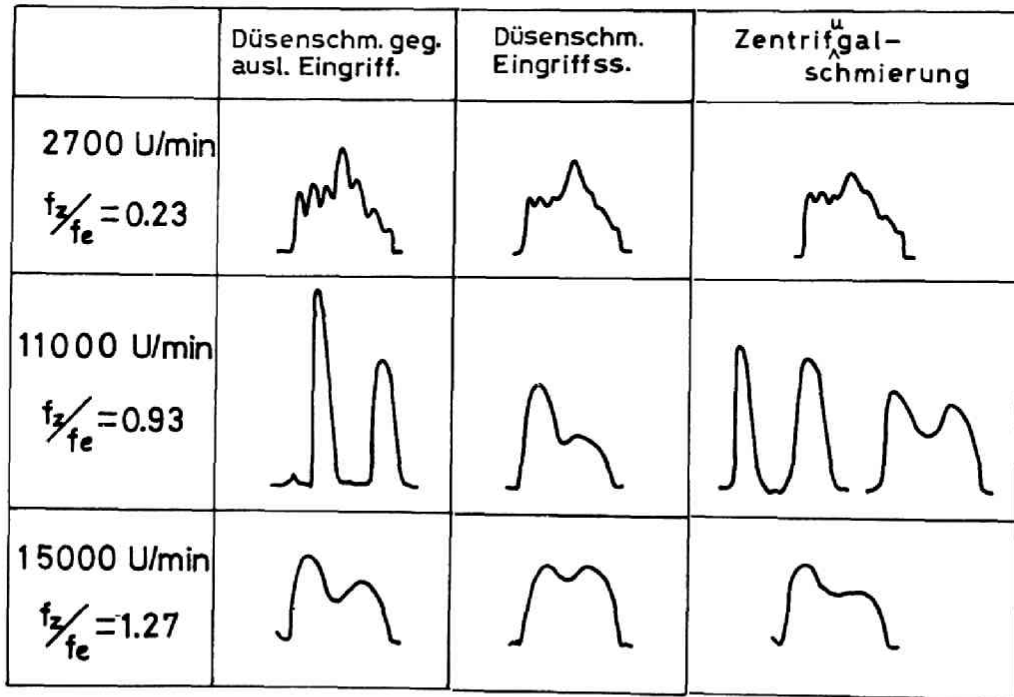
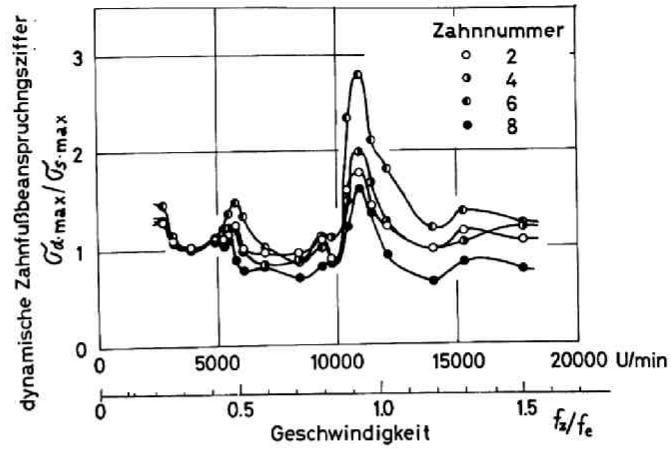


Bild 54. Vergleich zwischen den zeitlichen Abläufen der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen je nach Schmiermethode (gemessen bei 1100 kp·cm)

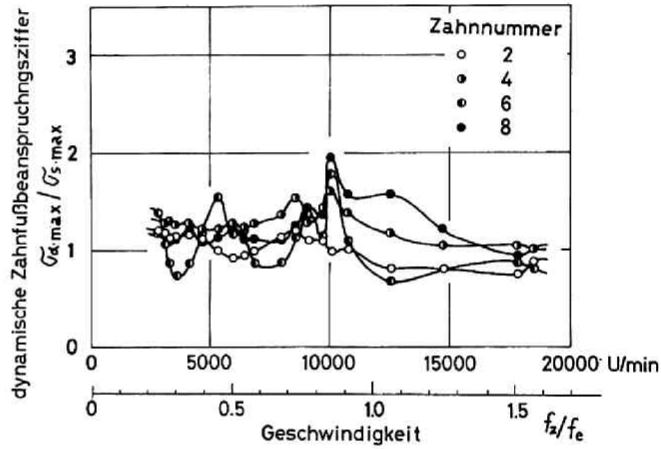
dynamische Zahnfußbeanspruchung natürlich die gleiche Form wie oben, vgl. Kap. 6. Bei Verwendung der Zentrifugalschmierung werden die kleinen Wellen in den dynamischen Zahnfußbeanspruchungs-Kurven sehr schwach (siehe 2700 U/min). Und die Zahnflankenabtrennung wird sehr gering, oder verschwindet manchmal ganz, auch wenn die Betriebsgeschwindigkeit in die Gegend des Hauptresonanzpunktes kommt, wobei die Differenz zwischen der ersten und zweiten Spitze der Zahnfußbeanspruchung kleiner wird (siehe 11000 U/min). Auch bei 15000 U/min erscheint die gleiche Änderungstendenz in der dynamischen Zahnfußbeanspruchung. Dieses Verhalten entspricht genau der Änderung der berechneten dynamischen Zahnfußbeanspruchung durch Vergrößerung des Dämpfungsfaktors δ , vgl. Bild 50. Deshalb kann man annehmen, daß sich der Dämpfung der Umfangsschwingungen bei Betrieb mit Zentrifugalschmierung sehr verstärkt. Es scheint jedoch, daß sich der Dämpfungsfaktor nicht geradlinig in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit ändert. Bei Düsen-schmierung an der Eingriffsseite zeigt die dynamische Zahnfußbeanspruchung fast die gleiche Form wie bei Zentrifugalschmierung. Damit scheint bewiesen, daß den eingreifenden Zahnflanken mehr Schmierstoff zugeführt wird, und daß auch der Dämpfung der Umfangsschwingungen des Zahnradpaars zunimmt.

Bild 55 (a), (b), (c) zeigt die Meßergebnisse der maximalen dynamischen Zahnfußbeanspruchungen am Abtriebszahnrad für die verschiedenen Schmiermethoden in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit. Die vier Kurven in jedem Bild wurden mit den 4 gleichen Zähnen desselben Abtriebszahnrades ermittelt. Was man auf dem Bild erkennt, ist, daß die dynamische Zahnfußbeanspruchung für die verschiedenen Schmiermethoden verschieden ist. D.h. die dynamischen Zahnfußbeanspruchungskurven, die bei Schmierung auf der Seite des auslaufenden Eingriffs im Geschwin-

(a) Düsenschmierung
gegen den
auslaufenden
Eingriff



(b) Düsenschmierung
auf der
Eingriffsseite



(c) Zentrifugal-
schmierung

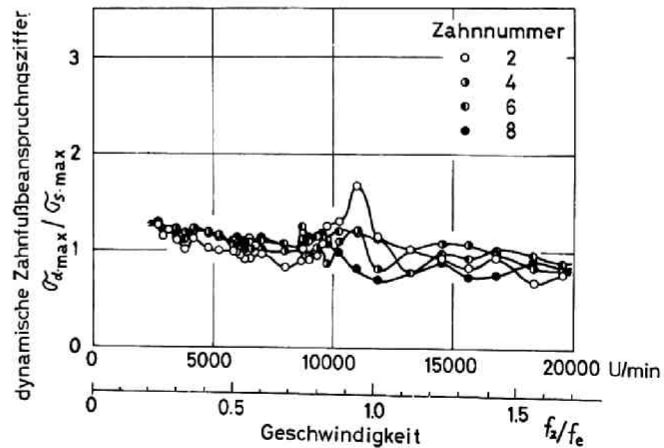
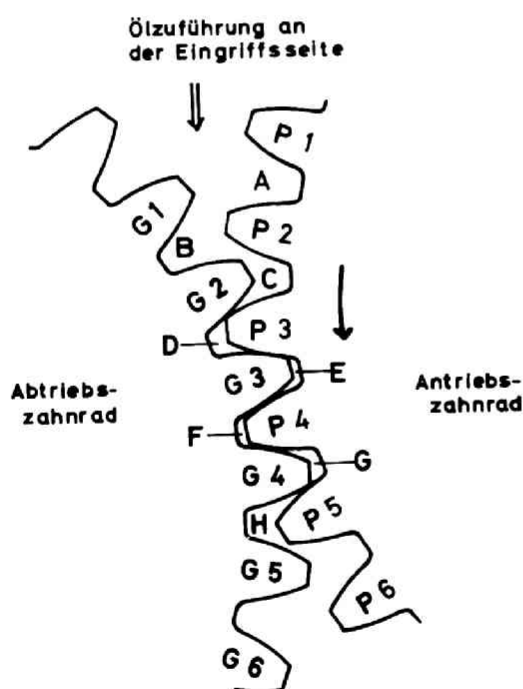


Bild 55. Einfluß der Schmiermethode auf den Verlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen (gemessen bei 1100 kp·cm)

digkeitsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes eine klare Stufenfolge bildeten (vgl. Kapitel 6), zeigen bei Schmierung an der Eingriffsseite und bei Zentrifugalschmierung einen willkürlichen Verlauf, und die höchste dynamische Zahnfußbeanspruchung findet, je nach Schmiermethode, an einem anderen Zahnfuß statt. Man sieht auch, daß sich bei Schmierung an der Eingriffsseite der Hauptresonanzpunkt etwas nach unten verschiebt. Die Ursache dafür wird wie folgt angenommen: Bild 56 zeigt das Zahnradpaar im Eingriff. Wenn der Schmierstoff an der Eingriffsseite zugeführt wird, ist im Bereich A,B,C,D, zwischen den Zahnköpfen und Zahnfüßen genügend Öl. Deshalb bildet sich zwischen den Zahnflanken leicht ein Schmierfilm, besonders zwischen den Flanken des Zähne-



paars (3), bestehend aus Zahn P3 und G3, da der Öldruck in Bereich D mit fortlaufendem Eingriff wegen der Raumverringernng sehr hoch wird. Ein genügender Schmierfilm zwischen den Zahnflanken ändert den Dämpfungsfaktor, den Verlauf der Gesamtzahnfederhärte, ihre Größe, und die Wirkung der Zahnradfehler. Infolgedessen ändern sich auch die Umfangsschwingungen. Der Unterschied zwischen dem Schmierzustand

Bild 56. Schema von Schmierstoffzuführung und Eingriffen

bei Zentrifugalschmierung und bei eingriffseitiger Düsen-
schmierung besteht darin, daß bei Zentrifugalschmierung
die Schmierstoffmenge im Bereich A, B, C geringer ist
als bei besagter Düsen-
schmierung, aber im Bereich G, H
kehren sich die Verhältnisse um. Wenn man die Auswirkung
der beiden Schmiermethoden (Bild 55 (b), (c)) auf den
Verlauf der Kurven für dynamische Zahnfußbeanspruchung
vergleicht, zeigt sich, daß der Schmierzustand, d.h.
die Ölverteilung im Bereich D, E, F, G bei Zentrifugal-
schmierung gleichmäßiger bleibt als bei eingriffs-
seitiger Düsen-
schmierung, da die Kurven für die dyna-
mische Zahnfußbeanspruchung, Bild 55, bei der ersteren
weniger bewegt sind als bei der letzteren. Um den Ein-
fluß der obigen Schmiermethoden auf die dynamische Belastung
zu untersuchen, wurde die dynamische Zahnfußbeanspruchung
an den bereits herangezogenen 4 Zähnen und weiteren 4
Zähnen des Abtriebszahnrades des obigen Zahnradpaares
unter gleichen Betriebsbedingung gemessen. Ein Vergleich
zwischen dem Summenverlauf der acht Kurven und der beiden
Schmiermethoden erlaubt es, Schlüsse zu ziehen auf die
allgemeinen Änderungstendenzen bezüglich der dynamischen
Zahnfußbeanspruchungen. Bild 57 gibt den Vergleich
zwischen Düsen-
schmierung an der Seite des auslaufenden
Eingriffs und an der Eingriffsseite. Die schraffierten
Flächen entsprechen der Streuung der dynamischen Zahn-
fußbeanspruchung bei den 8 Zähnen. Der Summenverlauf
der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen weist bei Düsen-
schmierung auf der Eingriffsseite mehr Spitzen auf als
bei Düsen-
schmierung auf der Gegenseite, was anzeigt,
daß der Schmierzustand bei eingriffsseitiger Düsen-
schmierung stärker von der Geschwindigkeit abhängig ist.
Aber die Zunahme der dynamischen Zahnfußbeanspruchung
am Hauptresonanzpunkt ist weniger stark als bei Düsen-
schmierung auf der Eingriffsseite. In letzterem Fall
zeigt sich, daß sich der Haupt- und der zweite Resonanz-
punkt in Richtung geringerer Betriebsgeschwindigkeit

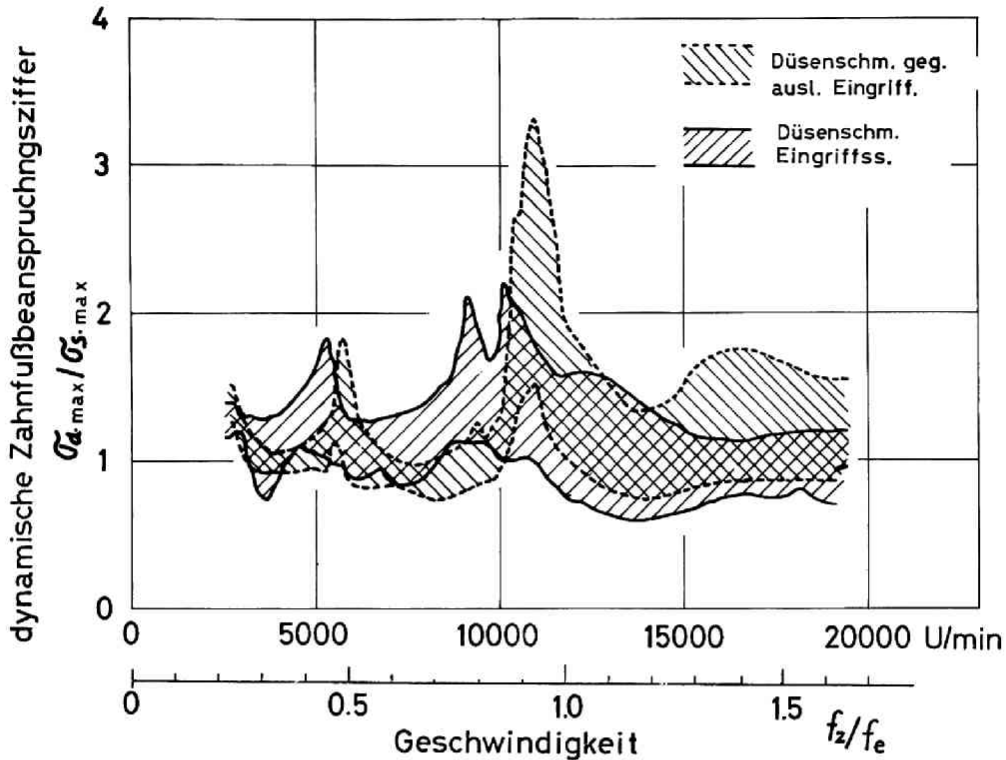


Bild 57. Änderung der dynamischen Zahnfußbeanspruchungsziffer durch Verwendung von Düsen Schmierung auf der Eingriffsseite

verschieben, und daß ein weiterer scheinbarer Hauptresonanzpunkt etwas links vom eigentlichen Hauptresonanzpunkt (bei etwa 9000 U/min) auftritt. Das ist ein Beweis für die Verringerung der Zahnfederhärte, die die Existenz eines Schmierfilms zwischen den Zahnflanken bestätigt, aber auch für die starke Geschwindigkeitsabhängigkeit des Schmierfilms. Und im Hochgeschwindigkeitsbereich scheint die eingriffsseitige Düsen Schmierung in Richtung auf eine Verringerung der

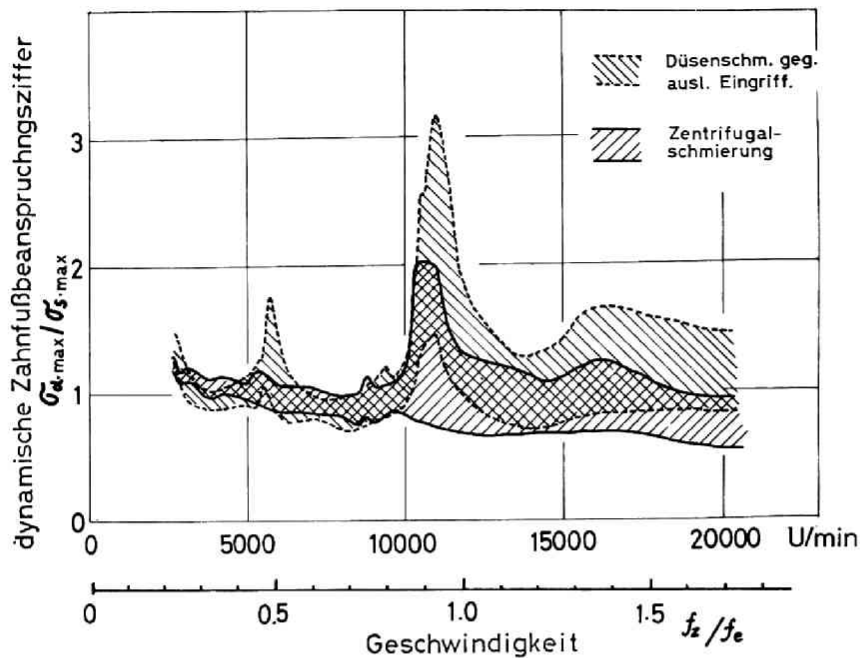


Bild 58. Änderung der dynamischen Zahnfußbeanspruchungs-ziffer durch Zentrifugalschmierung

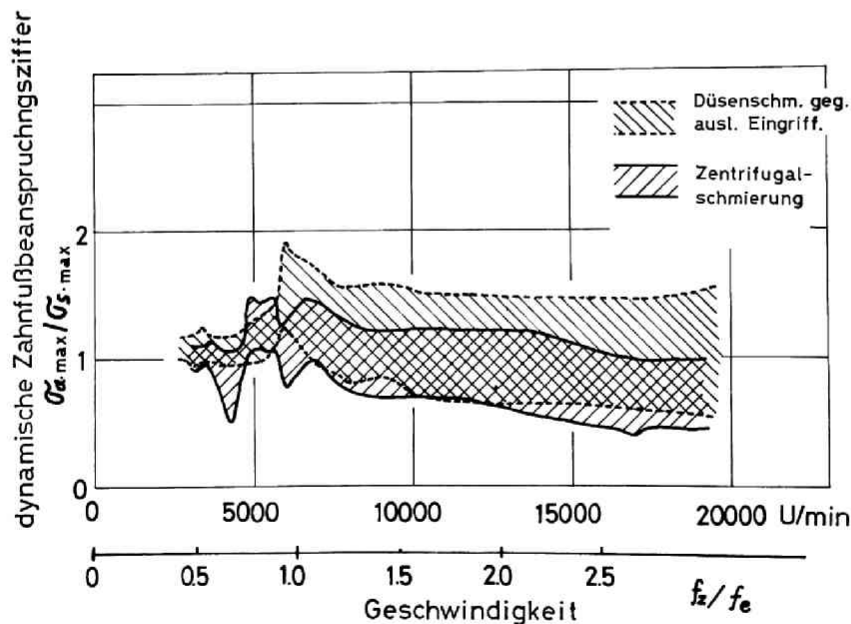


Bild 59. Änderung der dynamischen Zahnfußbeanspruchungs-ziffer durch Zentrifugalschmierung. Zusätzliche Trägheitsmasse verschiebt den Resonanzpunkt in Richtung niedrigerer Betriebsgeschwindigkeit.

dynamischen Zahnfußbeanspruchung hin zu wirken. Bild 58 zeigt einen Vergleich zwischen dem Summenverlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen bei Zentrifugalschmierung und bei Düsen- und Düsen- am auslaufenden Eingriff. Bild 59 gibt die entsprechenden Meßergebnisse für dasselbe Zahnradpaar, das mit zusätzlichen Trägheitsmassen versehen wurde, um den Hauptresonanzpunkt herabzudrücken. Man sieht aus den Bildern, daß bei Zentrifugalschmierung in dem Kurvenband der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen die Spitzen für die Betriebsgeschwindigkeiten von $f_z / f_e = 1/2, 1/3, \dots$ fast verschwinden, und die Kurven am Hauptresonanzpunkt weit weniger hoch aufsteigen. Das veranschaulicht gut die Wirkung des höheren Dämpfungsfaktors auf die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen, die auch aus Bild 49 zu ersehen ist. In Bild 49 werden die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen im Betriebsbereich weit oberhalb des Hauptresonanzpunktes ($f_z > f_e$) mit größerem Dämpfungsfaktor δ nicht kleiner. Aber abweichend davon sind sie nach den Meßergebnissen nach Bild 58 und Bild 59 beträchtlich geringer als bei Düsen- schmierung von der Gegenseite her, und sie sind auch etwas niedriger als bei Düsen- schmierung an der Eingriffsseite. Neben der Erhöhung des Dämpfungsfaktors ist dies die zweite wünschenswerte Auswirkung der Zentrifugalschmierung auf die dynamischen Zahnfußbeanspruchungen.

Man sieht in Bild 59, daß bei der Zentrifugalschmierung der Summenverlauf der dynamischen Zahnfußbeanspruchungen eine ganz andere Form hat als bei der auslaufsseitigen Düsen- schmierung, und wie diese vom berechneten Verlauf abweicht, vgl. Bild 49. D.h. er weist keinen klaren Haupt- und zweiten Resonanzpunkt auf, und zeigt unregelmäßige Spitzen und Senken. Das ist ein Beweis, welcher starken Einfluß der Schmierzustand auf die Änderung der dynamischen Belastung hat. Wenn sich die

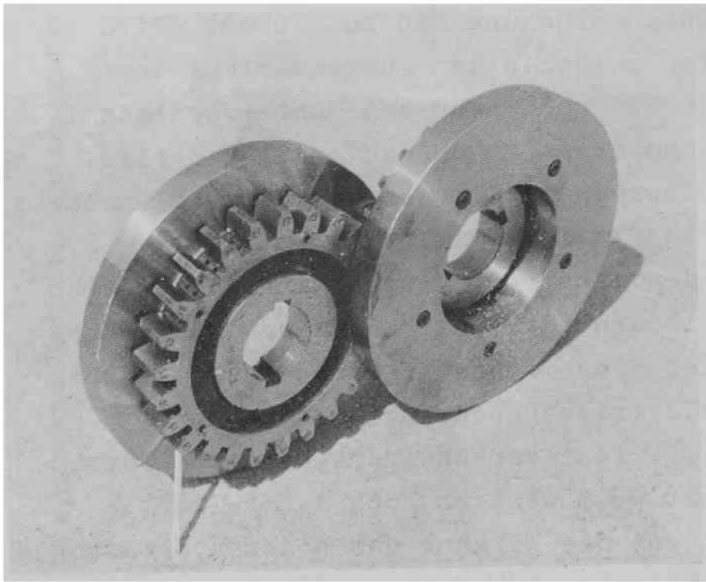


Bild 60. Aussehen der Zahnräder mit
zusätzlichen Trägheitsmassen

Trägheitsmassen
in etwa 1 mm
Entfernung von
den Seitenflächen
befinden, Bild 60,
scheint dieser
Spielraum für
einen freien
Fluß des Zentri-
fugalschmieröls
nicht zu genügen,
was zu einem
unregelmäßigen
Schmierzustand
im Bereich zwischen
den Köpfen und
Füßen der kämmenden
Zähne führt.

9-5. Vergleich zwischen den Schmiermethoden in Bezug auf den Leistungsverlust

Eine bestimmte Schmiermethode, die bezüglich des Schmierzustandes und der Verringerung der dynamischen Belastung Vorteile mit sich bringt, dabei aber zu einem sehr starker Leistungsverlust führt, stellt keine brauchbare Schmiermethode dar. Bild 61 zeigt die erforderlichen Stromstärken für den Antriebsmotor des Prüfstandes in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit. Die durch die 3 Schmiermethoden gewonnenen Kurven geben ein klares Bild von den Unterschieden bezüglich der Verlustleistung. Die Methoden,

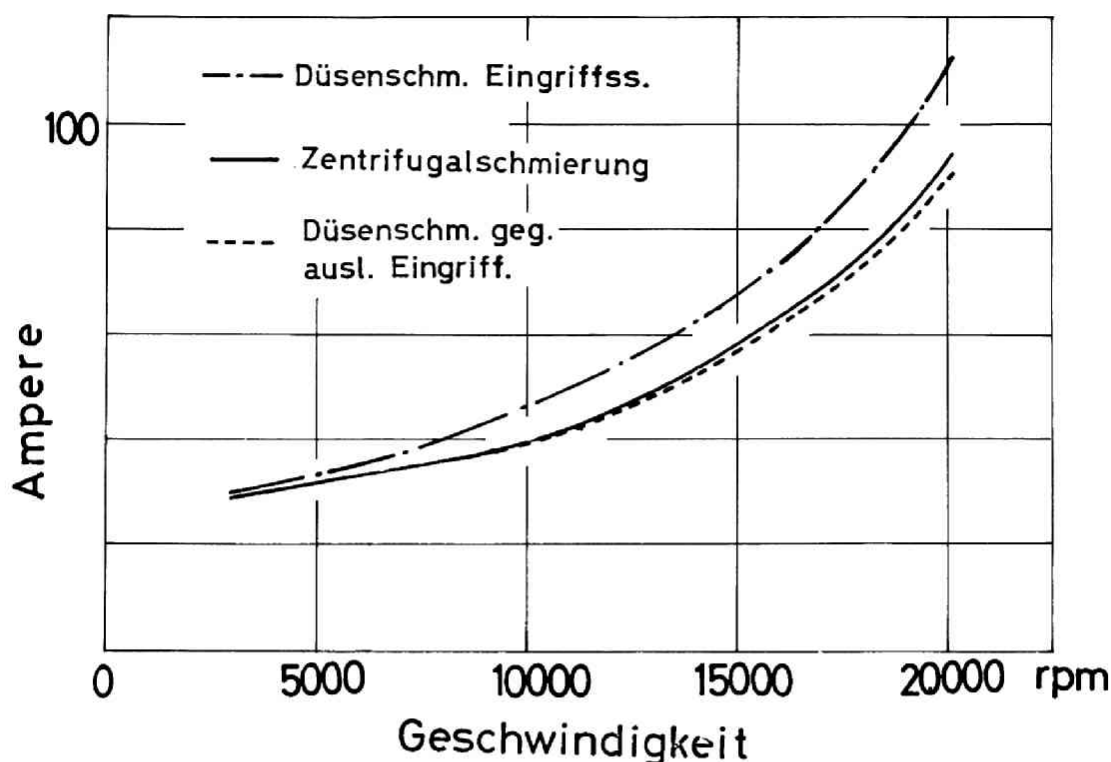


Bild 61. Einfluß der Schmiermethoden auf die Verlustleistung des Prüfstandes (gemessen bei Übertragungsdrehmoment 1100 kp·cm)

die sich für die Verringerung der dynamischen Belastung am vorteilhaftesten erwiesen haben, nämlich die eingriffsseitige Düsen Schmierung und die Zentrifugalschmierung, vergrößern die Verlustleistung im Vergleich zur Düsen Schmierung am auslaufenden Eingriff. Aber bei der Zentrifugalschmierung ist die Zunahme der Verlustleistung sehr gering, und würde deshalb in der Praxis wohl kaum einen Nachteil gegenüber der auflaufseitigen Düsen Schmierung bringen. Dagegen ist die Zunahme bei Düsen Schmierung an der Eingriffsseite im Hochgeschwindigkeitsbereich außerordentlich

stark. Und es ist wohl anzunehmen, daß Düsensmierung an der Eingriffsseite eine Verschlechterung des Wirkungsgrades von Getrieben mit sich bringt.

Der große Unterschied in der Zunahme der Verlustleistung bei eingriffsseitiger Düsensmierung im Gegensatz zur Zentrifugalsmierung, welche beide für die Verringerung der dynamischen Belastung gleich wirkungsvoll sind, scheint darin zu liegen, daß sich bei ersterer im Bereich zwischen den Zahnkörpern und den Zahnfüßen vor dem Eingriff überschüssiger Schmierstoff ansammelt, der keine eigentliche - Schmierungsaufgabe erfüllt.

Der Vorteil der Zentrifugalsmierung vor den anderen Schmiermethoden, besonders für Hochgeschwindigkeitsgetriebe, liegt damit klar auf der Hand.

10. Dynamisches Verhalten von Schrägverzahnungen

Es gibt fast keinen Fall in der Praxis, in dem für Hochgeschwindigkeitsgetriebe eine Geradverzahnung verwendet wird. Fast immer handelt es sich um Schrägverzahnung oder Pfeilverzahnung. Diese Tatsache zeigt, daß erfahrungsgemäß die Schrägverzahnung gegenüber der Geradverzahnung einen Vorteil bietet. Über das dynamische Verhalten von mit niedriger oder mittlerer Geschwindigkeit laufenden Schrägverzahnungen sind schon einige Untersuchungen [15] veröffentlicht worden, aber noch kaum über das bei Hochgeschwindigkeit. In diesem Kapitel soll also das dynamische Verhalten von Schrägverzahnungen bei sehr hohen Betriebsgeschwindigkeiten experimentell untersucht und mit dem von Geradverzahnungen verglichen werden.

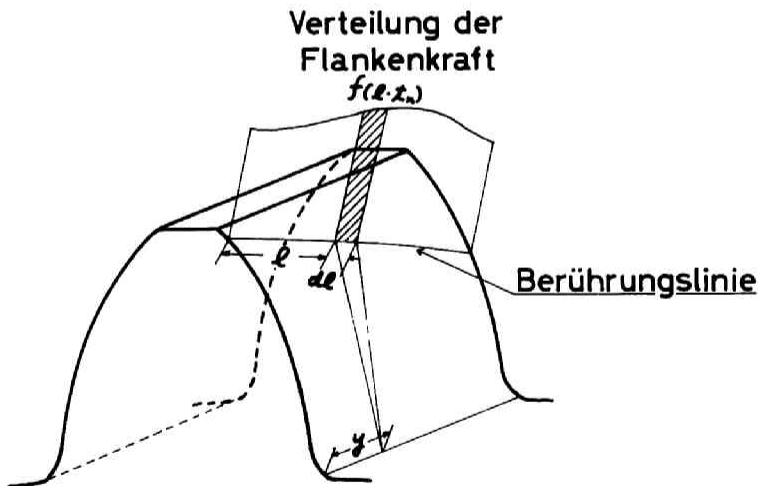
10-1. Methode zur Untersuchung der Umfangsschwingungen bei Schrägverzahnung

Es ist ein sehr schwieriges Problem, die dynamische Belastungsziffer bei Schrägverzahnung zu definieren. Vom Standpunkt der Festigkeitsberechnung aus scheint die gleiche Definition wie bei der Geradverzahnung zutreffend: die dynamische Belastungsziffer wird hier als Verhältnis zwischen der höchsten dynamisch wirkenden Kraft (oder Beanspruchung) und der höchsten statisch wirkenden Kraft definiert, wobei nicht berücksichtigt wird, an welcher Stelle der Berührungslinie auf der Eingriffsfläche die Kraft ihren höchsten Wert annimmt. Aber bei Schrägverzahnung ist es äußerst schwierig, nach dieser Definition die dynamische Belastungsziffer experimentell zu bestimmen.

Wird auf einer Zahnflanke in einer bestimmten Lage, die durch t_n , vgl. Bild 64, definiert ist, eine Berührungslinie angenommen, Bild 62, so läßt sich die Verteilung der Flankenkraft über die Berührungslinie als $f_{\omega}(l, t_n)$ angeben, wobei l eine angenommene Stelle auf der Berührungslinie darstellt, und es ergibt sich eine Funktion, die die Beziehung zwischen der Flankenkraft $f_{\omega}(l, t_n) \cdot dl$ im unendlich kleinen Bereich dl auf der Berührungslinie und die Beanspruchung am Zahnfuß an der Stelle y , als $S_i(y, l, t_n)$ darstellt. Bei Geradverzahnung stimmt $S_i(y, l, t_n)$ mit dem Einfluß-Koeffizienten $S(x)$ für die Zahnfußbeanspruchung überein. Bei Schrägverzahnung wird die Zahnfußbeanspruchung σ_y an der Stelle y durch

$$\sigma_y = \int_0^{l_1} S_i(y, l, t_n) \cdot f_{\omega}(l, t_n) \cdot dl \quad (26)$$

ausgedrückt, dabei ist l_1 die Länge der Berührungslinie. Das Spannungssignal κ_{y_0} vom Meßstreifen an der Zahnfußstelle y_0 entspricht



$$\kappa_{y_0} = C_{str} \int_0^{l_1} S_i(y, l, t_n) \cdot f_{\omega}(l, t_n) \cdot dl \quad (27)$$

dabei ist C_{str} eine Konstante, die durch die Empfindlichkeit des Meßstreifens u.s.w. bestimmt wird. Die dynamische

Bild 62. Einfluß der Flankenkraft auf die Dehnung an einer angenommenen Stelle y am Zahnfuß

Zahnfußbeanspruchungsziffer an der Stelle $y = y_0$ ist aus Gleichung (26) und (27) zu berechnen:

$$\frac{\max\{\sigma_{y_0:\text{dynamisch}}\}}{\max\{\sigma_{y_0:\text{statisch}}\}} = \frac{\max\{\kappa_{y_0:\text{dynamisch}}\}}{\max\{\kappa_{y_0:\text{statisch}}\}} \quad (28)$$

Die beiden Werte des dynamischen und statischen κ_{y_0} können experimentell bestimmt werden, so erhält man die dynamische Zahnfußbeanspruchungsziffer an der Stelle, wo sich der Meßstreifen befindet. Die dynamischen Zahnfußbeanspruchungsziffern für die übrigen Punkte auf der Zahnfuß-Linie und die dynamische Flankenkraftsziffer gemäß obiger Definition sind

$$\frac{\max\{\sigma_{y:\text{dynamisch}}\}}{\max\{\sigma_{y:\text{statisch}}\}}$$

und

$$\frac{\max\{f_{\omega}(\ell, t_n) : \text{dynamisch}\}}{\max\{f_{\omega}(\ell, t_n) : \text{statisch}\}}$$

Diese Werte bilden keine Funktion von κ_{y_0} . Das heißt, das Meßspannungssignal aus einem Meßstreifen gibt wenig Hinweise auf die Zahnfußbeanspruchung und Flankenkraft an anderen Stellen außerhalb des Meßstreifens.

Aber bei einem fast fehlerfreien Zahnräderpaar kann man das dynamische Verhalten der Umfangsschwingungen im allgemeinen sehen: Nun wird $k_{\omega}(\ell, t_n)$ als Zahnfederhärte des Zähnepaars (i) an der Stelle ℓ auf der Berührungslinie angenommen und $e_{\omega}(\ell, t_n)$ als Fehler an dieser Stelle, dann ist

$$f_{\omega}(\ell, t_n) = k_{\omega}(\ell, t_n) \cdot (X - e_{\omega}(\ell, t_n)) \quad , \quad (29)$$

vgl. Gleichung (7). Aus Gleichung (27) und (29) bekommt man

$$\frac{\kappa_{y_0:\text{dynamisch}}}{\kappa_{y_0:\text{statisch}}} = \frac{\chi \int_0^{l_1} \Delta_i(y_0, l, t_n) \cdot k_{i1}(l, t_n) \cdot dl - \int_0^{l_1} \Delta_i(y_0, l, t_n) \cdot k_{i1}(l, t_n) \cdot e_{i1}(l, t_n) \cdot dl}{\chi_s \int_0^{l_1} \Delta_i(y_0, l, t_n) \cdot k_{i1}(l, t_n) \cdot dl - \int_0^{l_1} \Delta_i(y_0, l, t_n) \cdot k_{i1}(l, t_n) \cdot e_{i1}(l, t_n) \cdot dl} \quad (30)$$

dabei zeigt Index s den statischen Wert an. Wenn κ_{y_0} für eine entsprechende Stelle auf der Berührungslinie in die Gleichung eingesetzt wird ($t_{n:\text{dynamisch}} = t_{n:\text{statisch}}$), und der Zahnfehler viel kleiner ist als χ (d.h. $\chi \gg e_{i1}(l, t_n)$), ergibt sich:

$$\frac{\kappa_{y_0:\text{dynamisch}}}{\kappa_{y_0:\text{statisch}}} \approx \frac{\chi}{\chi_s} \quad (31)$$

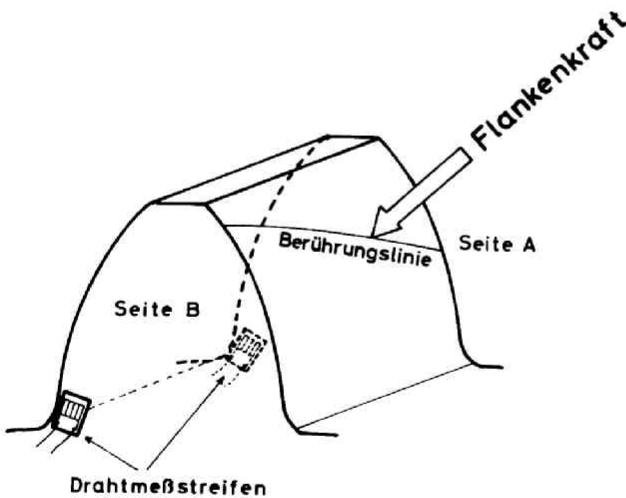


Bild 63. Anbringung der Drahtmeßstreifen

Gleichung (31) zeigt, daß man das dynamische Verhalten der Umfangsschwingungen zu einem entsprechenden Zeitpunkt t_n innerhalb der Gesamtberührungszeit für einen Zahn ermitteln kann. Und durch Gleichungen (29), (31) kann die dynamische Flankenkraft berechnet werden.

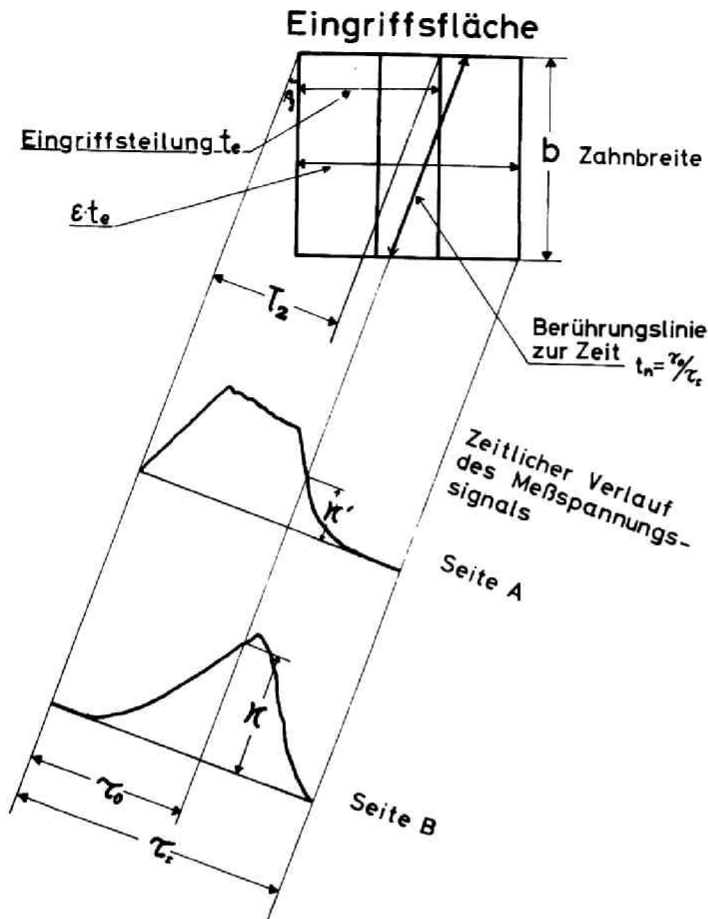


Bild 64. Schema für die Beziehung zwischen der Lage der Berührungslinie auf der Eingriffsfläche und dem entsprechenden Zeitabschnitt t_n innerhalb der gemessenen Spannungssignale

Bild 63 zeigt die Stelle, an der die Meßstreifen auf dem Prüfzahnrad angebracht waren. Die Meßstreifen befanden sich an den beiden Seitenflächen eines Zahnes gegen die Druckseite hin auf dem Bruchquerschnitt

Bild 64 zeigt das Schema für die Beziehung zwischen der Berührungslinie auf der Eingriffsfläche und dem entsprechenden Zeitpunkt t_n .

Die Größe des Spannungssignals für den konstanten Wert t_n ist κ (oder κ'). $t_n = \tau_0 / \tau_x$, dabei ist $\tau_x = (\epsilon + \epsilon_{sp}) \cdot T_z$ und τ_0 die Zeitdauer vom Eingriffsbeginn bis zum entsprechenden Zeitpunkt innerhalb der Spannungssignale aus beiden Meßstreifen.

Tafel 2. Daten der Versuchsschrägverzahnungen

Bezeichnung		Versuchszahnräder			
Modul	mm	4	4	4	4
Eingriffswinkel	Grad	20	20	20	20
Normalverzahnung					
Schrägwinkel	Grad	16,260	23,074	23,074	32,860
Zähnezahl		24	23	23	21
Wälzkreis-Dmr.	mm	100,0	100,0	100,0	100,0
Kopfkreis-Dmr.	mm	108,0	108,0	108,0	108,0
Zahnbreite	mm	20	20	32,14	20
Profilvers. fakt.		0	0	0	0
Prof.überdeck.grad		1,52	1,47	1,47	1,41
Sprg.überdeck.grad		0,446	0,622	1,00	0,863
Fertigung		MAAG Schleifen			
Werkstoff		SNCM 21			
Wärmebehandlung		einsatzgehärtet			
Genauigkeit		JIS 0 Grad			


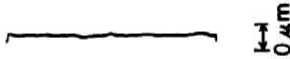

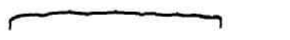


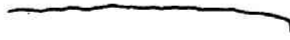
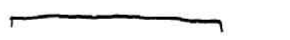








Zahnrad		Flankenform	Flankenrichtungsform
$\beta_s = 16.260^\circ$ $b = 20 \text{ mm}$	Rs		
	Ls		
$\beta_s = 23.074^\circ$ $b = 20 \text{ mm}$	Rs		
	Ls		
$\beta_s = 23.074^\circ$ $b = 32.14 \text{ mm}$	Rs		
	Ls		
$\beta_s = 32.860^\circ$ $b = 20 \text{ mm}$	Rs		
	Ls		

Bild 65. Fertigungsgenauigkeit der Versuchszahnräder

Tafel 2 zeigt die Daten des Prüfzahnradpaares, und Bild 65 zeigt Beispiele für die Flankenformen und die Flankenrichtungsformen der Prüfzahnräder.

10-2. Umfangsschwingungen bei Schrägverzahnung

Bild 66 zeigt die Meßformen der Spannungssignale von den Meßstreifen auf Seite B, Bild 63, für Zahnradpaare mit verschiedenen Schrägungswinkeln und verhältnismäßig schmaler Zahnbreite $b=20$ mm. Bei dem Zahnrad mit verhältnismäßig kleinem Schrägungswinkel ($\beta_s=16,260^\circ$)

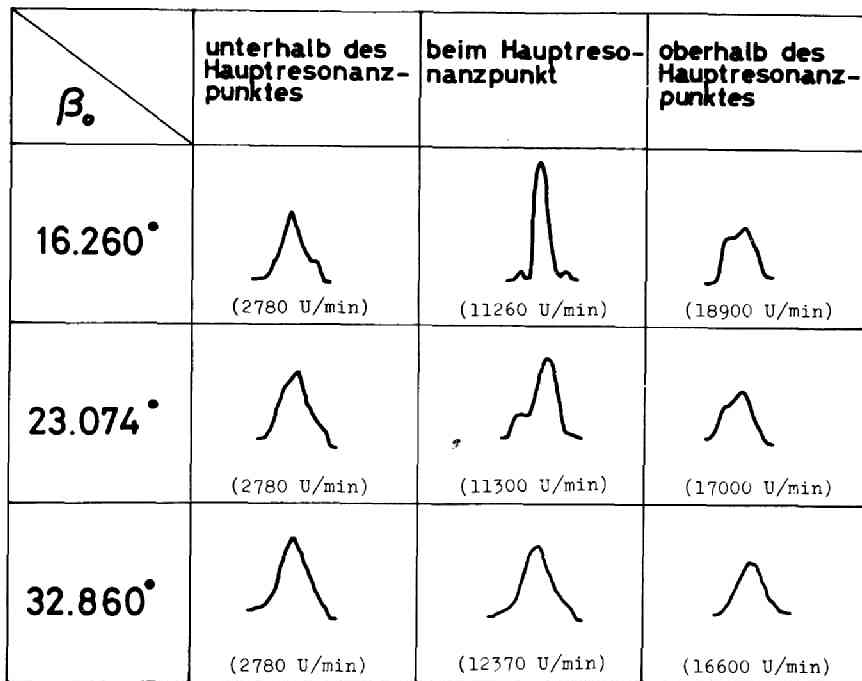
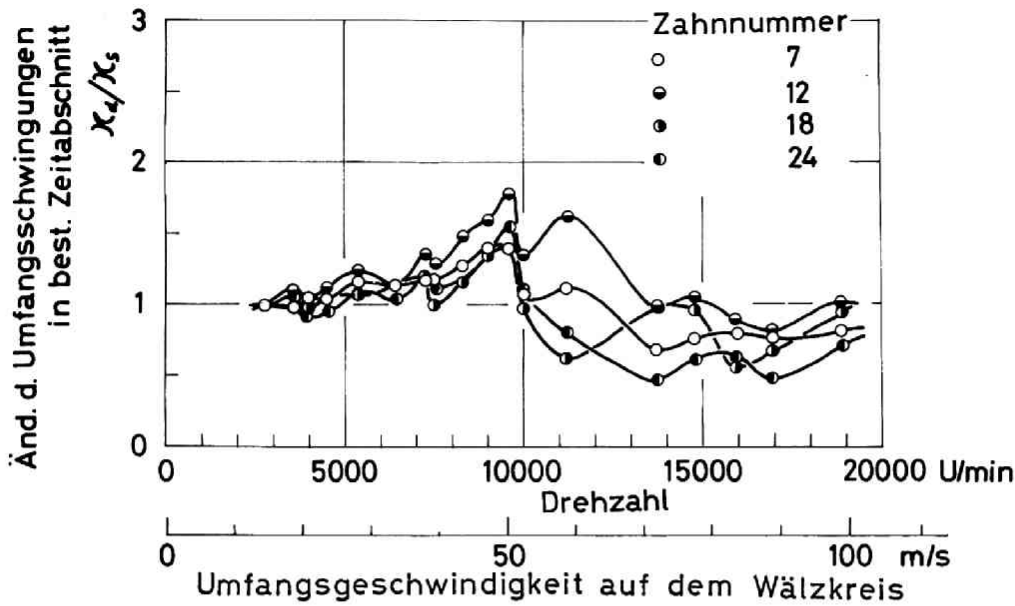


Bild 66. Zeitlicher Verlauf der Meßspannungssignale für verschiedene Betriebsgeschwindigkeiten und Schrägungswinkel. Zahnbreite der Versuchszahnräder $b=20$ mm. (Seite B, bei 1500 kp·cm)

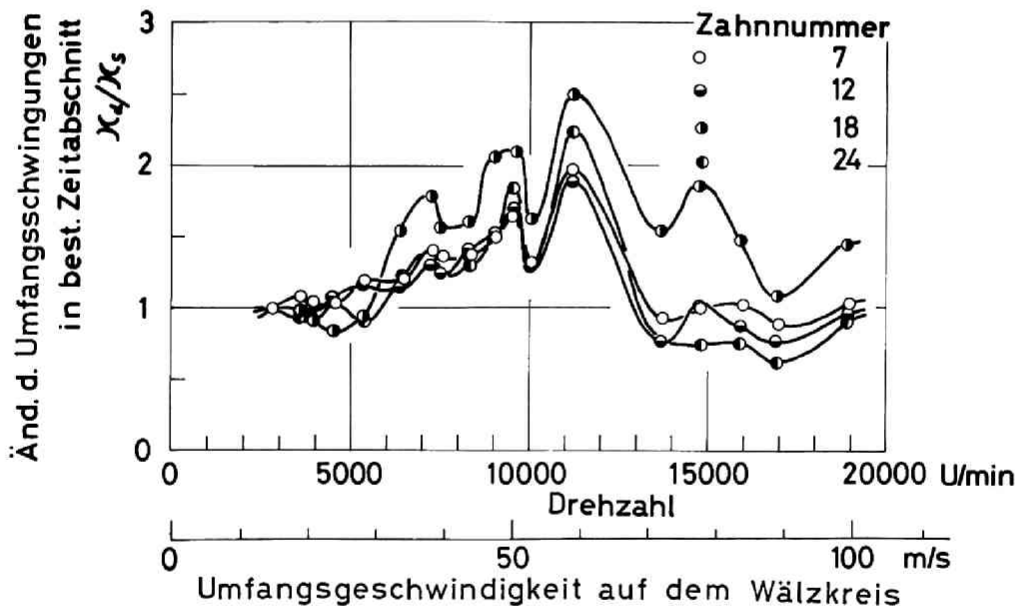
weisen die Spannungssignale einen klaren Hauptresonanzpunkt auf. Im Bereich der Betriebsgeschwindigkeit neben dem Hauptresonanzpunkt ändert sich die Form des Spannungssignals stark und wie bei Geradverzahnung findet auch eine Zahnflankenabtrennung statt. Bei einem Zahnradpaar von gleicher Zahnbreite weist mit der Zunahme des Schrägungswinkels auf $\beta_s = 23,074^\circ$ und $\beta_s = 32,860^\circ$ die Form des Spannungssignals unter verschiedenen Betriebsgeschwindigkeiten geringere Änderungen auf und der Resonanzzustand wird ziemlich verschwommen. Besonders für $\beta_s = 32,860^\circ$ kann man aus der Form des Spannungssignals nicht ermitteln, ob ein Resonanzzustand besteht oder nicht.

Bild 67 zeigt den Verlauf der Umfangsschwingungen zu bestimmten Zeitpunkten in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit. Die vier Kurven entsprechen den Meßwerten für vier verschiedene Zähne. Bild (a) zeigt die Größe der Umfangsschwingungen zu dem Zeitpunkt genau in der Mitte der Berührungszeit, und Bild (b) zeigt sie zum Zeitpunkt, wo das Meßspannungssignal bei Hauptresonanzgeschwindigkeit seinen höchsten Wert annimmt. Es ist selbstverständlich, daß der Verlauf der Umfangsschwingungen, die sich mit der Betriebsgeschwindigkeit ändern, davon abhängt, zu welchem Zeitpunkt sie innerhalb der Berührungszeit eines Zahnes untersucht werden.

Diese Tatsache erhellt aus der Änderung des Verlaufs der Kurvengruppen in Bild (a) und (b). Aber die Prüfung der Umfangsschwingungen zu verschiedenen Zeitpunkten über die Berührungszeit eines Zahnes hinweg ergibt, daß die Umfangsschwingungen bei Schrägverzahnungen mit verhältnismäßig kleinem Schrägungswinkel und schmaler Zahnbreite im Bereich der Hauptresonanzgeschwindigkeit rel. stark werden, und im Betriebsgeschwindigkeitsbereich oberhalb des Hauptresonanzpunktes mit zunehmender Geschwindigkeit sich wieder abschwächen, ebenso wie im Fall von Geradverzahnung.



(a) zum Zeitpunkt $t_n=1/2$



(b) zum Zeitpunkt, wo κ_d/κ_s bei 18900 U/min einen max. Wert annimmt

Bild 67. Verlauf der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaars mit Schrägungswinkel $\beta_s=16,260^\circ$ und Zahnbreite $b=20,0$ mm (gemessen bei 1500 kp·cm)

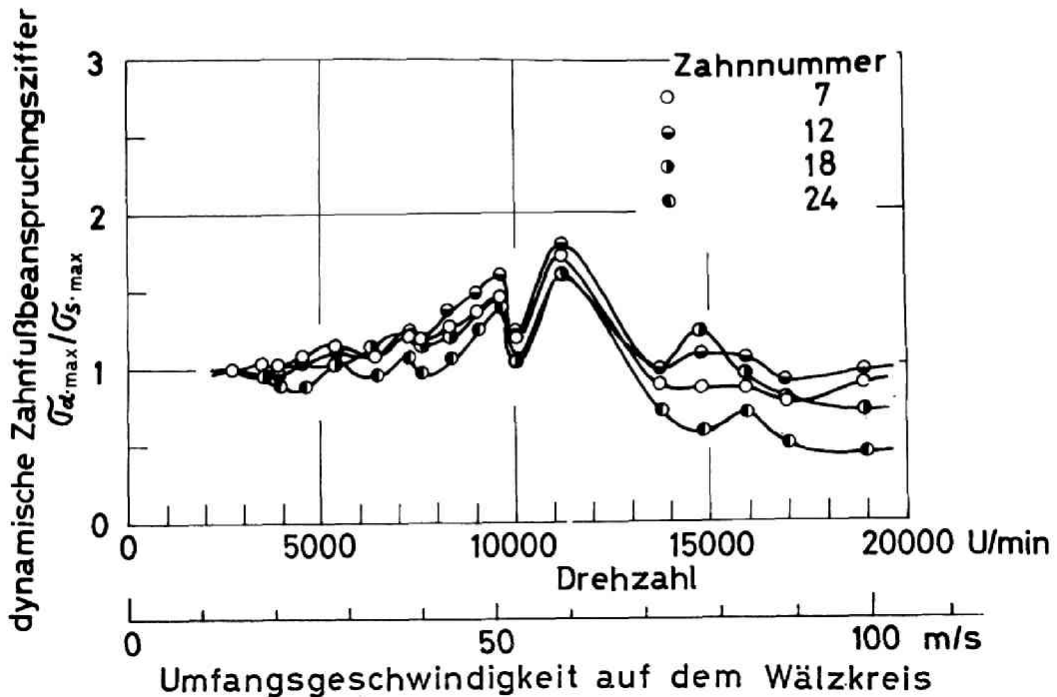
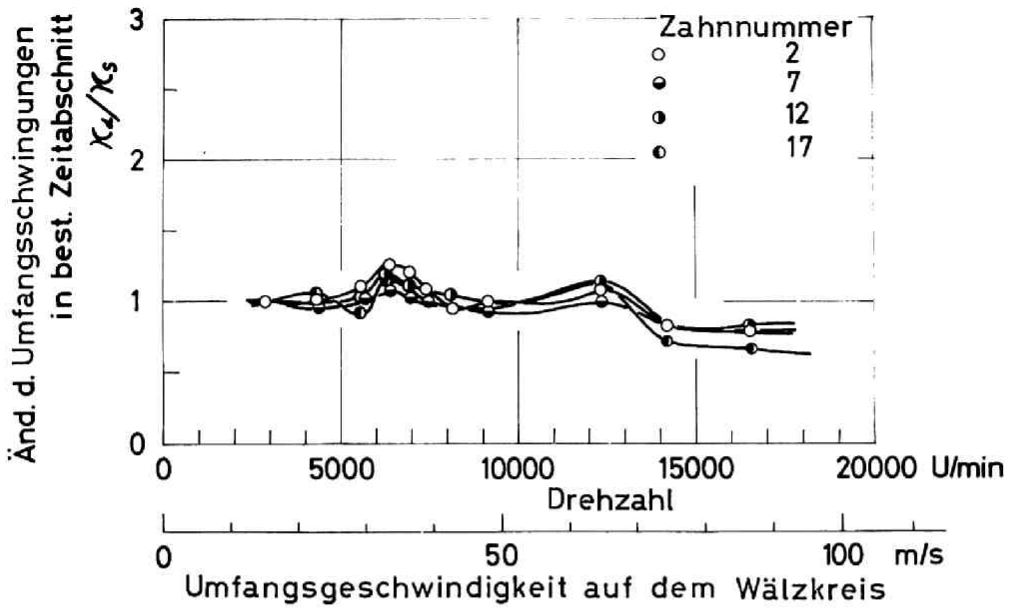


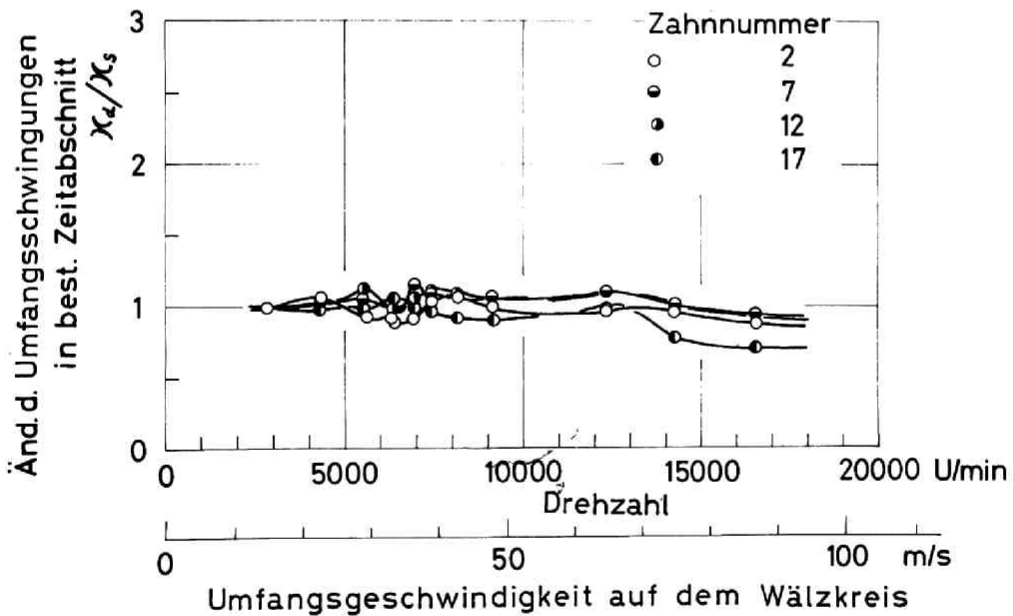
Bild 68. Dynamische Beanspruchung im Zahnfußbereich an der zuletzt in Eingriff kommenden Stelle des Zahnes (Abtriebszahnrad, $\beta_s=16,260^\circ$, $b=20,0$ mm, 1500 kp·cm)

Bild 68 zeigt die Zahnfußbeanspruchungsziffer gemäß Gleichung (28) an den Zahnfußteilen an der zuletzt in Eingriff kommenden Stelle des Zahnes (d.h. an der Stelle des Meßstreifens auf Seite B). Auch hier zeigt der Verlauf der Zahnfußbeanspruchungsziffer fast die gleiche Form in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit wie bei Geradverzahnung.

Bild 69 (a) gibt den Verlauf der Umfangsschwingungen für Schrägverzahnung mit einem verhältnismäßig großen Schrägungswinkel von $\beta_s=32,860^\circ$ zum Zeitpunkt genau in der Mitte der Berührungszeit in Abhängigkeit von der



(a) zum Zeitpunkt $t_n=1/2$

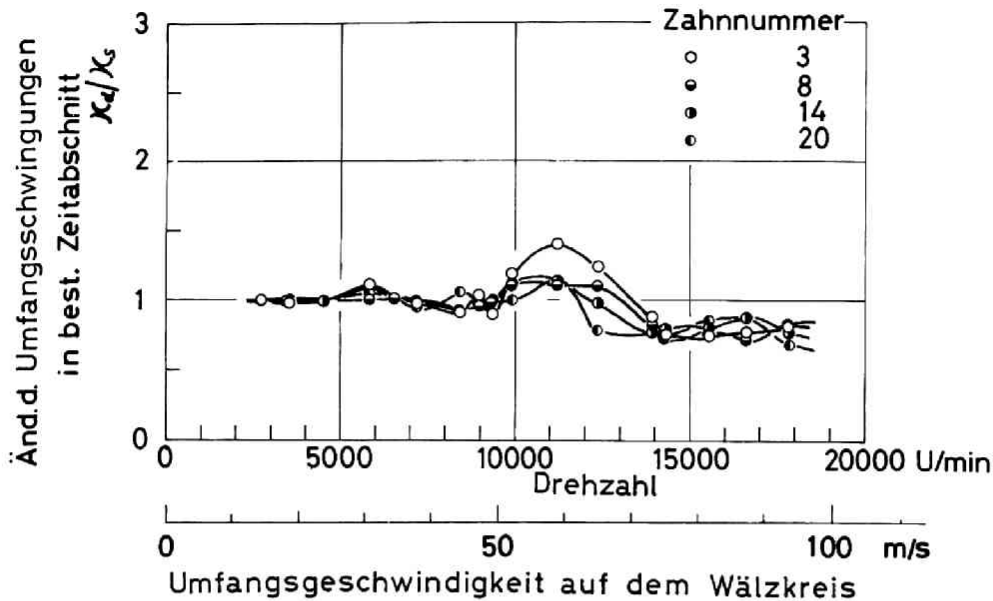


(b) zum Zeitpunkt, wo χ_d/χ_s bei 16600 U/min einen max. Wert annimmt

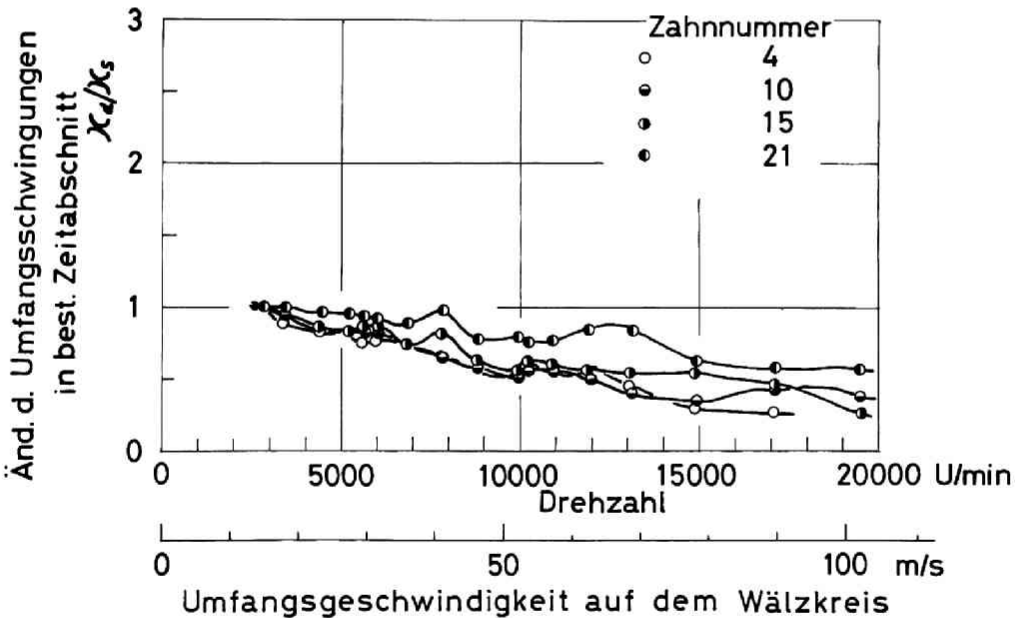
Bild 69. Verlauf der Umfangsschwingungen des Zahnradpaares mit Schrägungswinkel $\beta_s=32,860^\circ$ und Zahnbreite $b=20,0$ mm (gemessen bei 1500 kp·cm)

Betriebsgeschwindigkeit. In dem Fall, wo das Meßspannungssignal nur eine unklare Resonanz zeigt, findet man bei der quantitativen Messung der Meßspannungssignalform, daß die Umfangsschwingungen an der Haupt- und der zweiten Resonanzstelle etwas größer werden. Aber die Höhen der Spitzen sind hier um vieles schwächer als bei Geradverzahnung oder bei Schrägverzahnung mit kleinem Schrägungswinkel, und ihre Existenz kann fast vernachlässigt werden. Bei Schrägverzahnung mit verhältnismäßig großem Schrägungswinkel wird die Stärke der Umfangsschwingungen durch die Wahl des Prüfungszeitpunktes t_n während der Berührungszeit eines Zahnes wenig beeinflusst, was man aus einem Vergleich der Kurvenhöhen in Bild 69 (a) und (b) ersieht, da sich die Meßspannungssignalform mit der Betriebsgeschwindigkeit fast nicht ändert. Ein Vergleich der Kurven in Bild 67 und Bild 69 läßt erkennen, daß im Hochgeschwindigkeitsbetrieb mit zunehmender Betriebsgeschwindigkeit die Umfangsschwingungen allmählich schwächer werden, wobei bei Verzahnungen mit größerem Schrägungswinkel die Form ausgeglichener ist, als bei Verzahnungen mit kleinerem Schrägungswinkel. Auch ist die Stärke der Umfangsschwingungen bei großem Schrägungswinkel geringer als bei kleinem Schrägungswinkel.

Bild 70 zeigt den Verlauf der dynamischen Belastung für zwei Schrägverzahnungen mit gleichem Schrägungswinkel ($\beta_0 = 23,074^\circ$), doch mit verschiedener Zahnbreite von $b=20$ mm und $b=32,14$ mm zum Zeitpunkt $\tau = 1,046 \cdot T_z$, also in der Mitte der Berührungszeit des 20 mm breiten Zahnes. Bei der Verzahnung mit schmaler Zahnbreite ($b=20$ mm), nach Bild (a), ist ein leichter Hauptresonanzpunkt zu beobachten, während bei der Verzahnung mit breiter Zahnbreite ($b=32,14$ mm), nach Bild (b), praktisch keiner auftritt. Die Höhe der dynamischen Belastung wird bei einer Verzahnung mit breiter Zahnbreite merklich kleiner als



(a) Zahnradpaar mit Zahnbreite $b=20$ mm, gemessen zum Zeitpunkt $z_n=1/2$ ($\tau_0=1,046 \cdot T_z$)



(b) Zahnradpaar mit Zahnbreite $b=32,14$ mm, gemessen zum Zeitpunkt $z_n=0,423$ ($\tau_0=1,046 \cdot T_z$)

Bild 70. Vergleich der Umfangsschwingungen zwischen einem Zahnradpaar mit Schrägungswinkel $\beta_s=23,074^\circ$, Zahnbreite $b=20,0$ mm und einem mit gleichem Schrägungswinkel aber anderer Zahnbreite $b=32,14$ mm (gemessen bei 1500 kp·cm)

bei einer mit schmalerer Zahnbreite. Auch bei Prüfungen der dynamischen Belastung zu anderen Zeitpunkten des Eingriffs ist diese Erscheinung klar zu beobachten. Man kann deshalb annehmen, daß bei Schrägverzahnung überhaupt die Tendenz besteht, daß mit zunehmender Zahnbreite die dynamische Belastung schwächer wird.

Die Ursachen, warum die dynamische Belastung bei mit Hochgeschwindigkeit laufenden Schrägverzahnungen mit größer werdendem Sprungüberdeckungsgrad geringer wird, scheinen zu sein:

① Die Verminderung des Verhältnisses zwischen der Amplitude des zeitlichen Verlaufs der Gesamtzahnfederhärte $R(\alpha, x, e_m)$ und ihrer durchschnittlichen (zeitlichen) Größe.

② Die besseren Schmiereigenschaften bei Schrägverzahnung.

Verminderung des Verhältnisses zwischen dem zeitlichen Verlauf der Gesamtzahnfederhärte und ihrer durchschnittlichen Größe nach ① besagt, daß das angeregte Glied der Gleichung für die Umfangsschwingungen kleiner wird, wodurch die Steigung der vom Nullpunkt ausgehenden Linie, die den Betriebsdaten des Zahnradpaares entspricht, Bild 15, geringer wird und sich vom Unstabilitätsbereich entfernt.

Die Schmierung bewirkt bei Schrägverzahnung nach ② einmal eine Zunahme des Dämpfungsfaktors bei den Umfangsschwingungen, die durch die Vergrößerung der Schmierfilmdicke herbeigeführt wird. Als Grund der besseren Schmiereigenschaften bei Schrägverzahnung gegenüber der Geradverzahnung kommt hinzu, daß der Eingriffsstoß bei Schrägverzahnung schwächer ist und damit der Schmierfilm am Eingriffsbeginn kaum abreißt, und daß die Verschiebung der Berührungslinie in Axialrichtung die Schmierfilmbildung begünstigt, u.a.m.. Aber darüber hinaus übt die Schrägverzahnung auf den in

Axialrichtung eingepreßten Schmierstoff eine starke Schraubenpumpenwirkung aus, durch die mehr Schmierstoff der Eingriffsstelle zugeführt wird. Die Zuführungsmenge nimmt somit mit zunehmender Geschwindigkeit, zunehmendem Schrägungswinkel und größerer Zahnbreite zu, was also eine Verdickung des Schmierfilms bedeutet. Dieser verdickte Schmierfilm verursacht eine stärkere Dämpfung der Umfangsschwingungen, nach Kapitel 9.

Aber nach Bild 70 (b) kann die Schwächung der Umfangsschwingungen mit der Verminderung des Verhältnisses zwischen dem zeitlichen Verlauf und der durchschnittlichen Größe der Gesamtzahnfederhärte und der Stärkung des Dämpfungsfaktors allein nicht erklärt werden. Das heißt, die durchschnittliche, auf das Zahnradpaar übertragene Belastung wird, nach Bild 70 (b), mit zunehmender Betriebsgeschwindigkeit kleiner und im Hochgeschwindigkeitsbereich weicht sie vom eingestellten Wert ab, während sie bei konstantem Drehmoment gleich bleiben müßte. Eine Ursache dieser Diskrepanz scheint die oben erwähnte, den Schrägverzahnungen eignende Schmierwirkung zu sein. Bild 71 zeigt die Änderung des Verhältnisses zwischen der zeitlichen Länge τ des Meßspannungssignals und der Umdrehungszeit T_n des Zahnrades in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit, wobei der Wert für die niedrigste Geschwindigkeit als Maßstab genommen wird. Das zur Messung verwendete Zahnradpaar hat einen Schrägungswinkel $\beta_s = 23,074^\circ$ und eine Zahnbreite $b = 32,14$ mm, gemäß Bild 70 (b). Bei Schrägverzahnung mit großem Schrägungswinkel oder mit großer Zahnbreite tritt während der Zeit, wo die Zahnflanke an einer dem Meßstreifen entfernten Stelle belastet wird, kein Spannungssignal auf. Deshalb gibt der Kurvenverlauf in Bild 71 die Änderung des Verhältnisses zwischen der Berührungszeit eines Zahnes und der Umdrehungszeit nicht genau wider, und außerdem schleichen sich in die Messung von τ verhältnismäßig

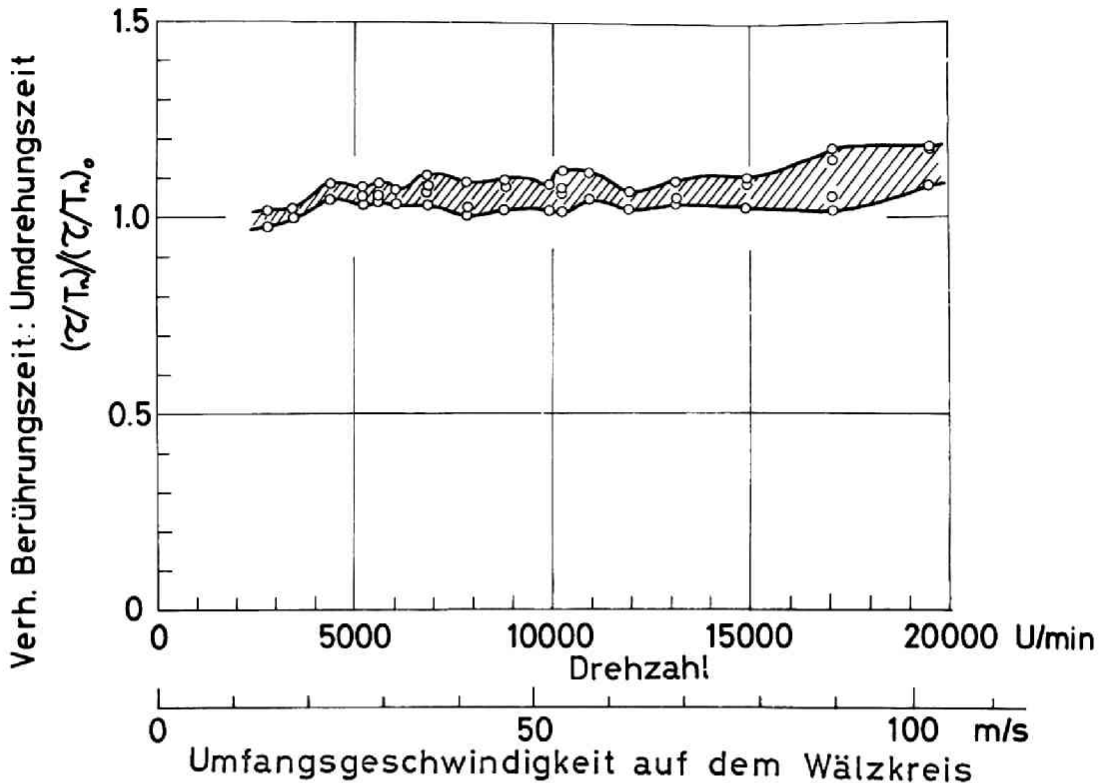


Bild 71. Zunahme des Verhältnisses zwischen Berührungszeit eines Zahnes und Umdrehungszeit des Zahnrades in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit.
Zahnradpaar: $\beta_0=23,074^\circ$, $b=32,14$ mm
1500 kp·cm (τ/T_n) : Wert von τ/T_n bei 2780 U/min

große Meßfehler ein, und die Meßergebnisse weisen eine relativ starke Streuung auf, die durch die schraffierte Fläche im Bild angezeigt wird. Aber man bekommt ein ungefähres Bild, wie sich das Verhältnis zwischen der Berührungszeit eines Zahnes und der Umdrehungszeit in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit ändert. Dieses Verhältnis entspricht bei Geradverzahnung dem dynamischen Überdeckungsgrad und dabei ist dieser außerhalb des Gebietes um den Resonanzpunkt fast konstant, siehe Bild 26. Aber bei Schrägverzahnung

steigt das Verhältnis gleichförmig mit zunehmender Betriebsgeschwindigkeit.

Bild 72 zeigt die Änderung der Verhältnisse für drei Zahnräderpaare mit verschiedenen Schrägungswinkeln von $\beta_s = 16,260^\circ$, $\beta_s = 23,074^\circ$, und $\beta_s = 32,860^\circ$, mit gleicher Zahnbreite von $b = 20$ mm, in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit. Jede Kurve stellt den Durchschnittswert aus den gestreuten Meßergebnissen dar. Es ergibt sich, daß bei größeren Schrägungswinkeln der durchschnittliche Steigungswinkel der Verhältnisse in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit größer wird. Diese Meßergebnisse, Bild 71 und 72, zeigen, daß ein größerer Sprungüberdeckungsgrad einen besseren Schmierzustand ergibt,

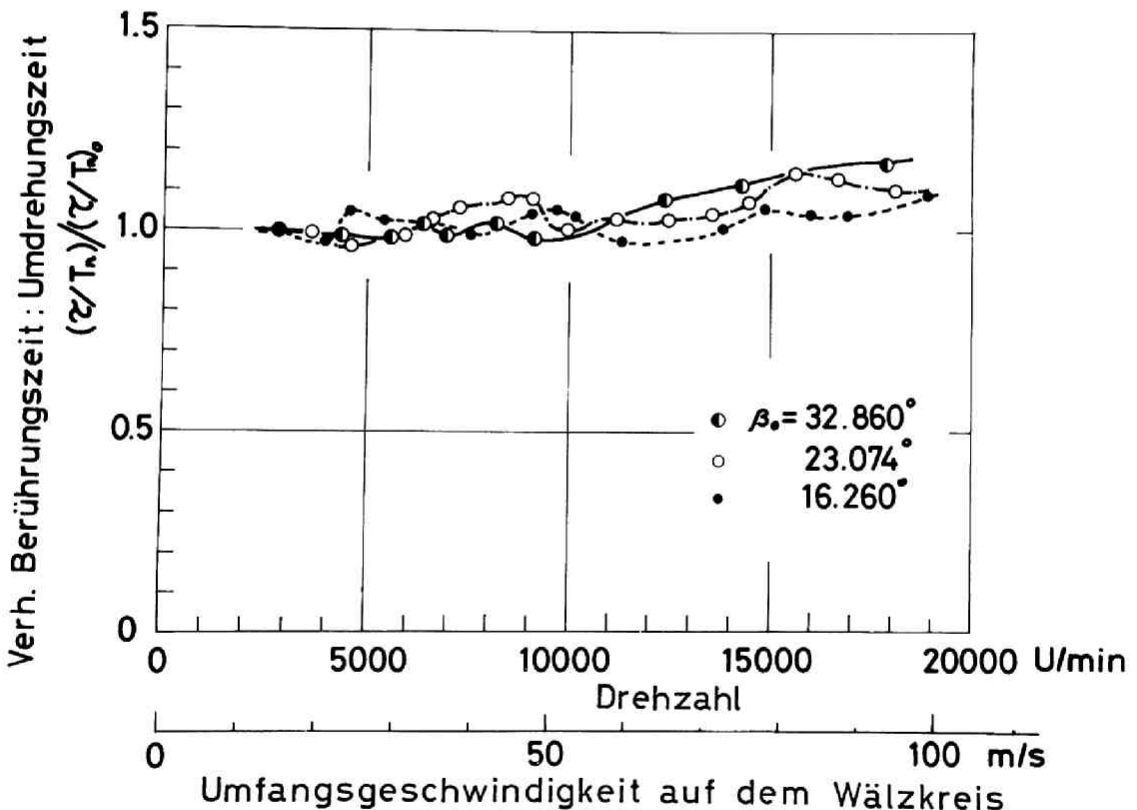


Bild 72. Änderung des Verhältnisses zwischen Berührungszeit eines Zahnes und Umdrehungszeit des Zahnrades bei verschiedenen Schrägungswinkeln (bei 1500 kp·cm)

d.h. einen dickeren Schmierfilm möglich macht, sodaß zusammen mit der Erhöhung des Dämpfungsgrades der Umfangsschwingungen, ein bestimmter Teil der Belastung mittels des Öldrucks übertragen wird, und infolgedessen das Verhältnis zwischen der Berührungszeit eines Zahnes und der Umdrehungszeit ebenfalls steigt, während gleichzeitig die Umfangsschwingungen außerordentlich schwach werden.

11. Beispiel eines Zahnbruchs bei einem Hochgeschwindigkeitsgetriebe

Bei einem Multiplikationsgetriebe, das in einer Ammoniumfabrik zwischen den Niederspannungsverdichter und den Hochspannungsverdichter geschaltet, und das mit sehr hoher Geschwindigkeit betrieben worden war, trat ein Zahnbruch auf, und bei der Untersuchung wurde festgestellt, daß dieser mit der dynamischen Zahnfußbeanspruchungstheorie, wie sie in 5-5 und 10 aufgestellt worden ist, erklärt werden konnte.

11-1. Das Getriebe, und die Vorgeschichte zu dem Vorfall

Bild 73 zeigt die Stelle, an der sich das Multiplikationsgetriebe befand. Es war ein in den U.S.A. hergestelltes, einstufiges Pfeilverzahnungsgetriebe, das über den Niederspannungsverdichter von der Dampfturbine her mit 7700 U/min gespeist wurde und dessen Ausgangleistung den Hochspannungsverdichter mit 10222 U/min antrieb. Das Getriebe war mit dem Nieder- und dem Hochspannungsverdichter durch Zahnradkupplungen verbunden. Als Lager dienten Metallager. Tafel 3 zeigt die Daten des Getriebes.

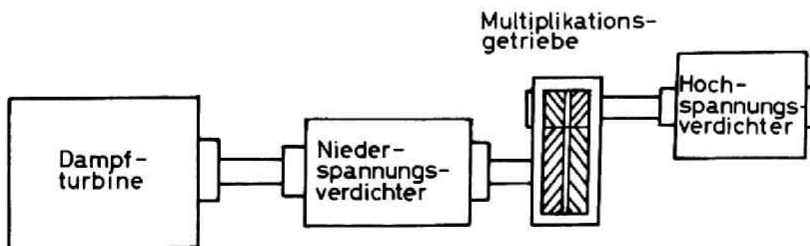


Bild 73. Einbaustelle des Multiplikationsgetriebes

Tafel 3 Daten des Multiplikationsgetriebes

Bezeichnung		Ritzel	Rad
Verzahnungstyp		Pfeilverzahnung	
Normalmodul	mm	3,175 (Diametralpitch 8)	
Zähnezahl		58	77
Eingriffswinkel	Grad	20°	
Teilkreis-Dmr.	mm	207,34	275,26
Schrägungswinkel	Grad	27°21'30"	
nutzbare Zahnbreite	mm	229	
Wärmebehandlung		vergütet	
Fertigung		geschabt	
Achsabstand	mm	241,30	
Übersetzung		1,32	
Steuerleistung	ps	4723	
Nenueingangs-drehzahl	U/min	7700	
Nennauegangs-drehzahl	U/min	10222	
Schmierstoff		Turbinenöl #90	
Schmiermethode		Düsenschmierung	
Schmierstoffmenge	m³/h	5	

Tafel 4 Zusammensetzung
des Werkstoffes des Ritzels
(Gewicht %)

C	0,42 %	Si	0,19 %
Mn	0,64	P	0,011
S	0,026	Ni	1,78
Cr	0,76	Mo	0,23

Als Schmierstoff wurde für beide Zahnräder und Lager Turbinenöl #90 verwendet. Tafel 4 zeigt eine Aufstellung der bei der Analyse des Ritzel-Werkstoffes gefundenen Elemente. Die Härte des Ritzels war $H_v = 380-400 \text{ kp/mm}^2$ an der Zahnflanke

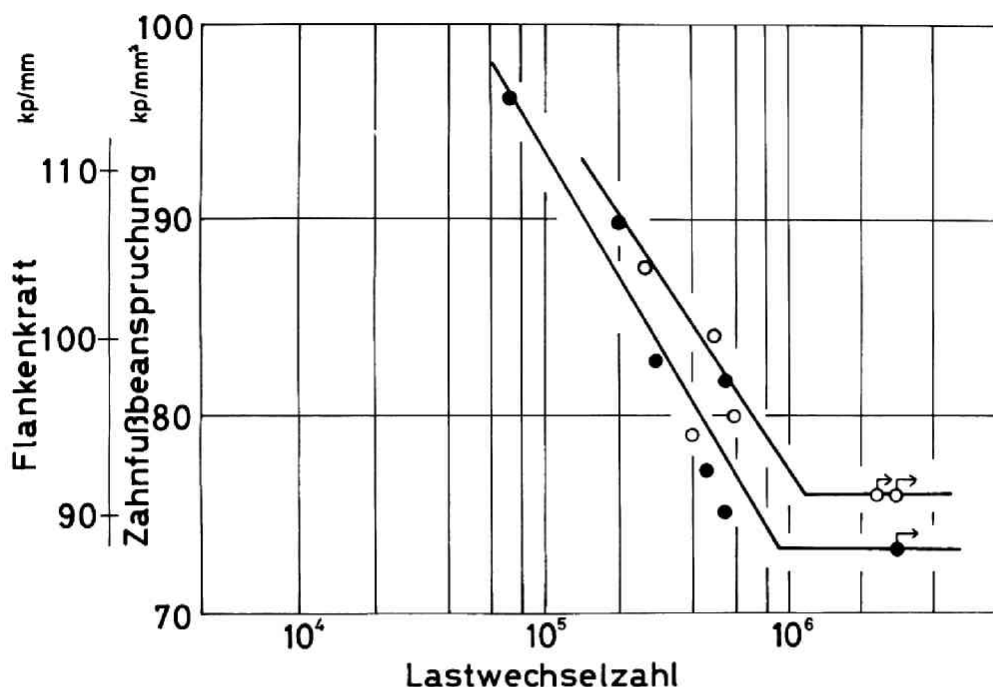


Bild 74. Ergebnis der Dauerfestigkeitsprüfung des Werkstoffes

und $H_v = 340-370 \text{ kp/mm}^2$ im Zahnkern, und die des Rades war $H_v = 335-350 \text{ kp/mm}^2$ an der Zahnflanke und $H_v = 310-340 \text{ kp/mm}^2$ im Zahnkern. Damit wurde angenommen, daß die Zahnräder vergütet waren. Um die Dauerfestigkeit des Ritzels zu ermitteln, wurde aus dem Werkstoff des Ritzels ein Zahnrad mit Modul 4 mm, Zähnezahl 17, Zahnbreite 9,35 mm, hergestellt. Seine Dauerfestigkeit, die mit dem Pulsator untersucht wurde, war etwas größer als 70 kp/mm^2 , Bild 74, ein Wert, der für den Werkstoff mit Wärmebehandlung angemessen war.

Das Getriebe war bis zum Vorfall etwa zehn Monate, ca. 6500 Stunden mit 3700 PS, und ca. 500 Stunden mit 3500 PS, gelaufen. In dieser Zeit war der Betrieb etwa 20 Mal unterbrochen worden. Und bei Wiederaufnahme des Betriebs

hatte der Leerlauf bis zum Dauerbetrieb ca. 10 Stunden eingenommen. 98 Tage vor der Aufdeckung des Zahnbruchs hatten sich die Lager des Getriebes festgefressen, und die Öltemperatur war sehr hoch geworden. Daraufhin, bis zur Aufdeckung des Zahnbruchs, waren die Zahnräder zweimal geprüft und die schadhaften Zahnflanken mit einem Handwetzstein ausgebessert worden.

11-2. Zustand des gebrochenen Zahnrades

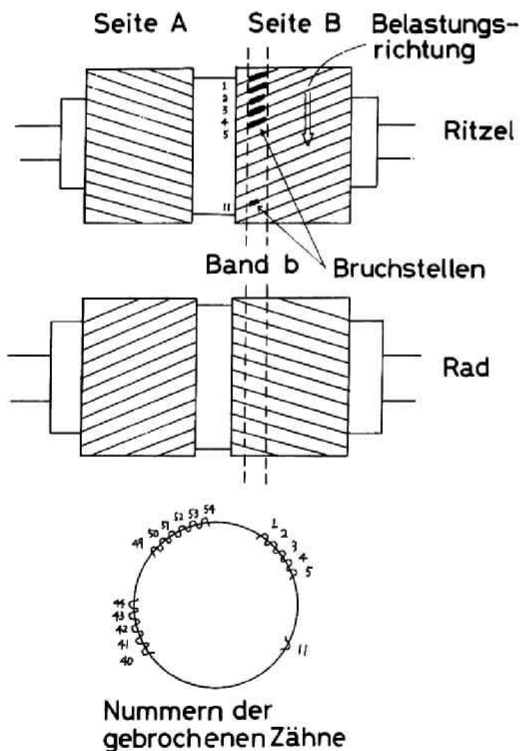
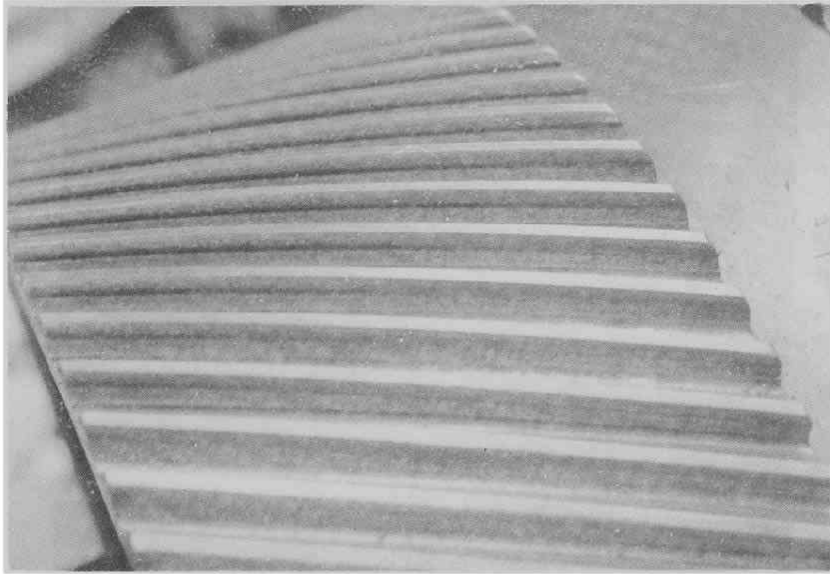
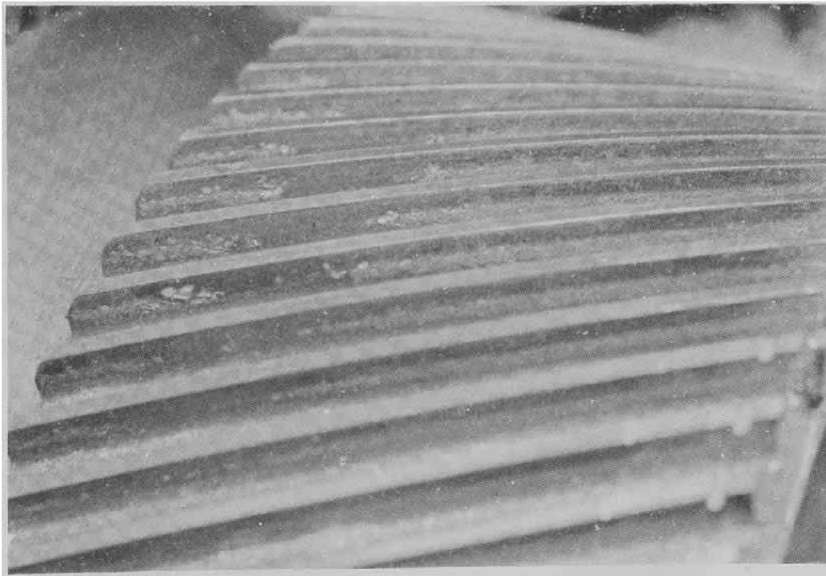


Bild 75 zeigt das Schema des gebrochenen Ritzels. Bei diesem Ritzel war der Verschlusszustand auf der rechten Seite B und auf der linken Seite A verschieden, vgl. Bild 76. Die Zähne auf Seite A waren sehr stark abgenutzt und die Zahnköpfe und Zahnfüße waren weitgehend verschlissen. Die Zähne auf Seite B zeigten starke Grübchenbildung an allen Flanken, ausgenommen längs Band b. In der Nähe von Band b, besonders links, (Bild 75), war die Grübchenbildung

Bild 75. Schema des gebrochenen Ritzels



Seite A



Seite B

Bild 76. Flankenzustand des Rades, Verschleiß
ebenso wie beim Ritzel

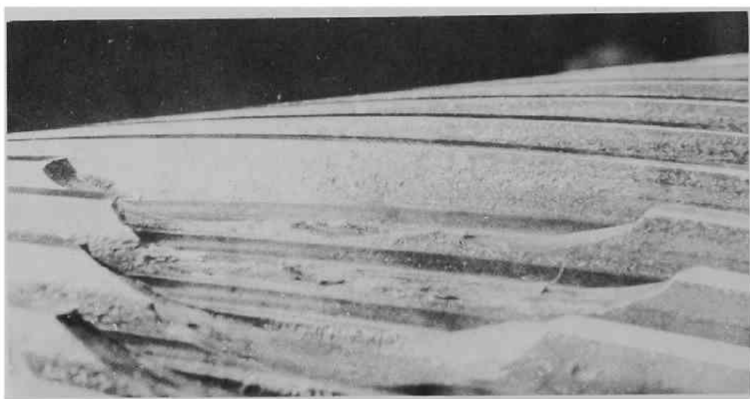
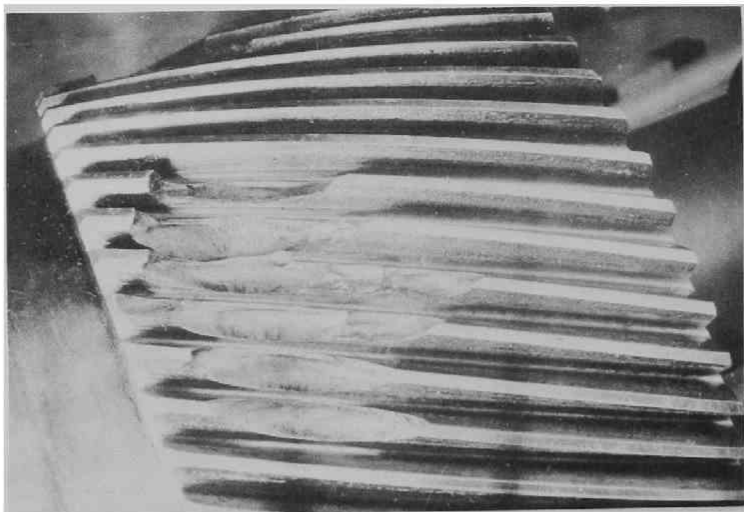


Bild 77. Bruchzustand und abgebrochene Zahnstücke

am stärksten. Im Band b zeigten sich an einigen Stellen Schabspuren. Die Berührung der Zähne gegen das rechte Ende der Seite B hin war schwächer gewesen, denn auch am rechten Rande der Seite B gab es viele Schabspuren. Wegen dieses starken Unterschiedes im Aussehen der Zahnflanken auf Seite A und B konnte angenommen werden, daß die Zahnflankenberührung sehr schlecht geworden war. Bild 77 zeigt die Zahnstellen, an denen die Teilchen abgesplittert sind, und die Zahnteilchen selbst. Die Bruchstellen haben Schalenform, was ein Anzeichen für Ermüdungsbruch ist.

11-3. Annahmen über die Ursachen des Zahnbruchs

Tafel 5 zeigt die Ergebnisse der Festigkeitsberechnung für das neue Zahnradpaar nach verschiedenen Berechnungsmethoden. Für die Zahnfehler wurden dabei die Werte verwendet, die an den Rückenflanken des gebrochenen Zahnrades gemessen worden waren. Man sieht, daß die Zahnfußfestigkeit genügend Sicherheit aufgewiesen hätte, d.h. daß nach den Berechnungsergebnissen die maximale Beanspruchung am Zahnfuß nicht oberhalb der Dauerfestigkeitsgrenze des Werkstoffes gelegen hätte. Die in Tafel 5 gegebenen Berechnungsergebnisse für die Flankenfestigkeit zeigen - wenn man die sehr große Lastwechselzahl durch den Hochgeschwindigkeitsbetrieb für das Ritzel in Betracht zieht - daß diese etwas klein war. Außerdem war der Ölzähigkeitsgrad für die Schmierung der Zahnräder etwas zu gering, da das Öl sowohl die Zahnräder wie die Lager zu schmieren hatte.

Die Ursache für den Zahnbruch bei einem Zahnrad, das im neuen Zustand eigentlich genügend Bruchsicherheit geboten

Tafel 5. Ergebnisse der Festigkeitsberechnung für das Zahnräderpaar

Perechnung mit Gleichungen nach	Festigkeit
Niemann [32]	Grübchensicherheit $S_g=1,65$ Bruchsisicherheit $S_b=3,35$
JSME [33]	für 10" Lastwechsel zulässige Übertragungsleistung 14200 PS mit Bezug auf Zahnbruch negativ mit Bezug auf Grübchenbildung für 10 ⁷ Lastwechsel 4600 PS mit Bezug auf Grübchenbildung
BS [34]	zulässige Übertragungsleistung für 20 Betriebsstunden pro Tag 2925 PS mit Bezug auf Zahnbruch 2160 PS mit Bezug auf Grübchenbildung für 2 Betriebsstunden pro Tag 4000 PS mit Bezug auf Zahnbruch und Grübchenbildung
Duddley [35]	für 10 ⁷ Lastwechsel Grübchensicherheit 1,4 Bruchsisicherheit 1,6

hatte, wurde wie folgt vermutet: Die Öltemperatur war mit dem Auftreten der Fressung im Lager sehr hoch gestiegen, und die Ölzähigkeit sehr stark abgefallen. Wegen der etwas mangelhaften Flankenfestigkeit und der durch den Temperaturanstieg verminderten Ölzähigkeit mußte die Grübchenbildung und der Verschleiß der Zahnflanken schnell fortgeschritten sein, und die Zahnflanken stark verformt worden sein.

Da die Betriebsgeschwindigkeit weit höher war als die Hauptresonanzgeschwindigkeit, mußten die Ergebnisse für mit Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit laufende Geradzahnung, nach 5-3, ganz allgemein auf alle Arten von

Stirnverzahnungen anwen^dbar sein, wie unter 3-1-3 erwähnt:
Nachdem sich also in dem Zahn^dräderpaar bei allen Zähnepaaren
verschieden große Zahnfehler ausgebildet hatten, wurden
die Flankenkraft und die Zahnfußbeanspruchung, auch im
Betrieb weiter oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit,
außerordentlich groß. Folglich traten am Zahnfuß Bean-
spruchungen auf, die die Dauerfestigkeit des Werkstoffes
überstiegen (nach den Berechnungen von Tafel 5 nicht zu
ermitteln), und diese haben den Bruch des Getriebes her-
beigeführt.

Dieser Zahnbruchvorfall bestätigte die Richtigkeit der
Untersuchungen über die dynamische Belastung bei mit
Über-Hauptresonanzgeschwindigkeit laufenden Zahn^dräderpaaren.
Angenommen, der Zahn j des Abtriebsritzels greift in den
Zahn i des Antriebsrades ein. $e_{xj}(\ell, t_n)$ sei der Zahnradfehler
an der Stelle ℓ auf der Berührungslinie, die sich zur
Zeit t_n an einer entsprechenden Stelle auf der Eingriffs-
flanke des Zahnes j befindet, und $e_{xi}(\ell, t_n)$ sei der entspre-
chende Fehler des Zahnes i. Nun wird die Hypothese
aufgestellt, daß die Fehlerverteilung in der Flanken-
richtung für alle Zähne gleich ist, und zwar für das
Abtriebszahnrad $e_{xb}(\ell, t_n)$ und für das Antriebszahnrad $e_{xb}(\ell, t_n)$.
Wenn die Eingriffsteilungsfehler an den Berührungsflanken
des Zahnes j bzw. i mit e_{xj} und e_{xi} bezeichnet werden,
und E_{xj-1} und E_{xi-1} die Summe der Eingriffsteilungsfehler
von dem als Zahn 1 angenommenen Zahn bis zum Zahn j-1
des Abtriebszahnrades bzw. zum Zahn i-1 des Antriebs-
zahnrades darstellen, können die Zahnradfehler mit

$$\left. \begin{aligned} e_{xj}(\ell, t_n) &= -E_{xj-1} - e_{xj} + e_{xb}(\ell, t_n) \\ e_{xi}(\ell, t_n) &= E_{xi-1} + e_{xi} + e_{xb}(\ell, t_n) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ausdrückt werden. Denn in der Untersuchung der Umfangs-
schwingungen des Zahn^dräderpaares sind die Zahnfehler

positiv, wenn sie zur Vergrößerung von X beitragen. Der sich auf die Umfangsschwingungen auswirkende Fehler ist

$$\begin{aligned} e_{a,j}(\ell, t_n) &= e_{x,j}(\ell, t_n) + e_{x,i}(\ell, t_n) \\ &= E_{x,i-1} - E_{x,j-1} + e_{x,i} - e_{x,j} + e_{x,b}(\ell, t_n) + e_{x,b}(\ell, t_n) \end{aligned} \quad (33)$$

Aus Gleichung (29) und (33), wird die Flankenkraftverteilung $f_{a,j}(\ell, t_n)$ zwischen dem Zahn j und i zu

$$\begin{aligned} f_{a,j}(\ell, t_n) &= k_{a,j}(\ell, t_n) \cdot (X - e_{a,j}(\ell, t_n)) \\ &= k_{a,j}(\ell, t_n) \cdot (X - E - e_{x,i} + e_{x,j} - e_{x,b}(\ell, t_n) - e_{x,b}(\ell, t_n)) \end{aligned} \quad (34)$$

dabei ist $E = E_{x,i-1} - E_{x,j-1}$

Die Zahnfehler, die in den einem bestimmten Zähnepaar vorausgehenden Zähnen auftreten, haben sehr wenig Einfluß auf die dynamische Belastung für das betreffende Zähnepaar, was im Bild 42 gezeigt wird, und die Summenteilungsfehler haben ebenfalls sehr wenig Einfluß, siehe Kapitel 7. Damit kann man E aus der Gleichung (34) ausschalten.

$$f_{a,j}(\ell, t_n) = k_{a,j}(\ell, t_n) \cdot (X - e_{x,i} + e_{x,j} - e_{x,b}(\ell, t_n) - e_{x,b}(\ell, t_n)) \quad (35)$$

Nachdem der Zahn j des getriebenen Zahnrades der Reihe nach in fast alle Zähne des Antriebszahnrades eingegriffen hat, ist der Durchschnitt von $f_{a,j}(\ell, t_n)$ für das betreffende Zahnradpaar während der N Umdrehungen des getriebenen Zahnrades

$$\begin{aligned} \overline{f_j}(\ell, t_n) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{a,i,j}(\ell, t_n) \\ &= (X + e_{x,j} - e_{x,b}(\ell, t_n) - e_{x,b}(\ell, t_n)) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_{a,i,j}(\ell, t_n) \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_{a,i,j}(\ell, t_n) \cdot e_{x,i} \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^N e_{x,i}$ ist eine kleine Konstante und $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_{u,p}(\ell, t_n)$ weist auch einen konstanten Wert $\overline{k(\ell, t_n)}$ auf, deshalb geht

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_{u,p}(\ell, t_n) \cdot e_{x,i} \quad \text{für größere Werte von } N \text{ gegen Null.}$$

Also wird $\overline{f_{ij}(\ell, t_n)}$

$$\overline{f_{ij}(\ell, t_n)} = \overline{k(\ell, t_n)} \cdot (\chi + e_{uj} - e_{ub}(\ell, t_n) - e_{xb}(\ell, t_n)) \quad (36)$$

Da bei einem mit sehr hoher Geschwindigkeit laufenden Zahnradpaar die Umfangsschwingungen, d.h. der Ausschlag von χ , geringer wird, ergibt sich aus Gleichung (36), daß nach längerem Betrieb der durchschnittliche Wert der Flankenkraft beim Abtriebszahnrad an dem Zahn mit dem größten Eingriffsteilungsfehler an der herausragenden Stelle der Zahnflanke am größten wird.

Nach dem gleichen Verfahren wird der Durchschnittswert der Belastungsverteilung beim Antriebszahnrad zu

$$\overline{f_{xi}(\ell, t_n)} = \overline{k(\ell, t_n)} \cdot (\chi - e_{xi} - e_{xb}(\ell, t_n) - e_{ub}(\ell, t_n)) \quad (37)$$

Und nach langem Betrieb wird der durchschnittliche Wert der Flankenkraft beim Antriebszahnrad an dem Zahn mit dem größten negativen Eingriffsteilungsfehler an der herausragenden Stelle der Zahnflanke am größten.

Es wird angenommen, daß die maximale Zahnfußbeanspruchung am Zahnfuß unterhalb der Berührungslinie auftritt, an der die maximale Belastung wirkt. Deshalb sind die Zähne des Abtriebszahnrades um so anfälliger, je größer die Eingriffsteilungsfehler sind. Und die Zähne des Antriebszahnrades sind um so anfälliger, je größer der negative Wert der Eingriffsteilungsfehler ist.

Für den besagten Zahnbruch-Vorfall zeigt Bild 78 die Meßwerte der Eingriffsteilungsfehler des gebrochenen Ritzels und die Bruchstellen der Zähne. Obwohl die

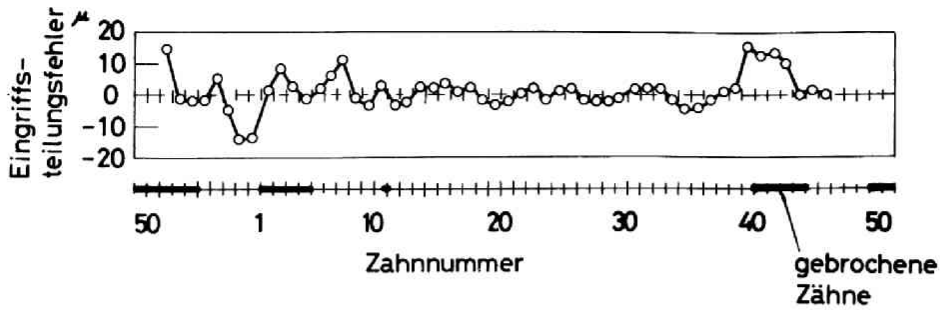


Bild 78. Eingriffsteilungsfehler des Ritzels und Zahnbruchstellen

Meßwerte für einige Eingriffsteilungsfehler fehlen (Bild 78), kann man sehen, daß die gebrochenen Zähne ziemlich genau dieselben Zähne sind, die größere Eingriffsteilungsfehler aufweisen. Es kann das als guter Beweis für die Richtigkeit der obigen Untersuchungen über Getriebe, die oberhalb der Hauptresonanzgeschwindigkeit laufen, angesehen werden.

12. Zusammenfassung

Um das dynamische Verhalten von Hochgeschwindigkeitsgetrieben zu klären und Grundlagen für den Bau von solchen Getrieben zu schaffen, wurde ein Hochgeschwindigkeits-Zahnradprüfstand entworfen und bis zu 32000 U/min (Umfangsgeschwindigkeit des Zahnrades auf dem Wälzkreis=168 m/sek) betrieben. Experimentelle Untersuchungen des dynamischen Verhaltens von mit hoher Geschwindigkeit laufenden Zahnradgetrieben, wie jene der Umfangsschwingungen und der dynamischen Belastung, sind durch Messungen der dynamischen Dehnung an den Zahnfüßen durchgeführt worden. Die Messungen sind bis zu 20000 U/min erfolgt, also handelt es sich hier um die Ergebnisse bei der bis jetzt schnellsten Betriebsgeschwindigkeit in der Welt. Die Arbeiten umfaßten Messungen, sowie theoretische Untersuchungen über die Umfangsschwingungen von Zahnradpaaren. Für die exakten theoretischen Untersuchungen wurden die nicht linearen Gleichungen für die Umfangsschwingungen mit Hilfe eines Digital-Computers gelöst. Das dabei aufgestellte Programm spiegelte die Folge der Eingriffe zwischen den Zahnradern genau wider, und ermöglichte die Berechnung der Umfangsschwingungen eines Zahnradpaares, das verschiedene Arten und Größen von Fehlern aufwies.

Was ermittelt wurde, war, daß die durch die Übertragungsbelastung entstandene Verlustleistung, gegenüber dem Ölwirbelverlust und dem Luftreibungsverlust, verhältnismäßig klein bleibt, und daß die Verwendung von Schmierstoff mit geringer Zähigkeit, der von einigen Schmierhandbüchern für die Schmierung von Hochgeschwindigkeitsgetrieben empfohlen wird, starken Flankenverschleiß, besonders bei Geradverzahnung, bewirkt.

Ein Zahnräderpaarsystem, das mit sehr hoher Geschwindigkeit oberhalb des Hauptresonanzpunktes betrieben wird, zeigt bezüglich der Umfangsschwingungen oder der dynamischen Belastung seiner Verzahnung manchmal ein Verhalten, das von dem bei niedriger Geschwindigkeit, bzw. von dem wegen des Vorhandenseins einer in der Eingriffsumlaufzeit periodischen Lösung für die Umfangsschwingungs-Gleichung (nach der Hypothese) zu erwartenden theoretischen Ergebnis abweicht. Die dynamische Zahnfußbeanspruchung verhält sich bei den sehr hohen Betriebsgeschwindigkeiten oberhalb des Hauptresonanzpunktes der Umfangsschwingungen wie folgt:

- 1) Bei einer sehr genauen Verzahnung ergibt sich mit zunehmender Geschwindigkeit ein abnehmender Verlauf, wie es nach dem Vorhandensein einer periodischen Lösung in der Eingriffsumlaufzeit vorausgesetzt wurde.
- 2) Bei Verzahnungen, bei denen die Flankenformfehler an jedem Zahn gleich sind, tritt, auch bei ziemlich großen Flankenformfehlern, mit zunehmender Geschwindigkeit ein abnehmender Verlauf auf.
- 3) Wenn die Flankenformfehler an jedem Zahn verschieden sind und, wegen der Fehler, die die Umfangsschwingungen erregende Kraft verhältnismäßig groß ist, zeigt die Zahnfußbeanspruchung mit zunehmender Geschwindigkeit meistens keinen abnehmenden Verlauf.
- 4) Bei Geradverzahnung wird die dynamische Zahnfußbeanspruchung, wegen der Differenz zwischen den Eingriffsteilungen des Antriebs- und des Abtriebszahnrades, beim getriebenen Zahnrad stärker beeinflusst als beim Antriebszahnrad. Die dynamische Zahnfußbeanspruchung wird beim Abtriebszahnrad an dem Zahn mit der größten Eingriffsteilungsdifferenz (wo die Eingriffsteilung des Abtriebszahnrades gegenüber der des Antriebszahnrades am kleinsten ist) am höchsten.

Der dynamische Anpreßdruck zwischen den Zahnflanken weist fast denselben Verlauf auf wie die Zahnfußbeanspruchung in Abhängigkeit von der Betriebsgeschwindigkeit. Bei der Geradverzahnung wird der dynamische Anpreßdruck besonders während der Berührung mit der Zahnkopfkante außerordentlich hoch, wenn der Schmierfilm die Belastung nicht verteilt.

Bei den Hochgeschwindigkeitsgetrieben ist eine vollkommene Schmierung nicht leicht zu erzielen. Einer der Hauptgründe ist die Schwierigkeit, den Schmierstoff an den Eingriffspunkt zu liefern. Diese Tatsache führte zur Überlegung, daß eine Zentrifugalschmiermethode, bei der der Schmierstoff an den Fußflächen durch Löcher nach außen gespritzt würde, diese Schwierigkeit beheben müßte. Es war angenommen worden, daß ein besserer Schmierzustand, nämlich eine verstärkte Belastungsverteilung durch den Schmierfilm, eine größere Dämpfung der Umfangsschwingungen mit sich bringen könnte. Tatsächlich änderte sich die Dämpfung der Umfangsschwingungen je nach der Schmiermethode beträchtlich, was der Änderung des zeitlichen Verlaufs der dynamischen Zahnfußbeanspruchung zuzuschreiben ist. Zentrifugalschmierung und eingriffsseitige Düsenschmierung wirkten sich positiv auf die Dämpfungsverstärkung aus, aber bei mit Hochgeschwindigkeit laufenden Zahnradpaaren stieg bei eingriffsseitiger Düsenschmierung die Verlustleistung gewaltig an, bei der Zentrifugalschmierung dagegen trat nur eine leichte Verstärkung auf. Damit ist bewiesen, daß die Zentrifugalschmierung einen besseren Schmierzustand schafft, sowie die Umfangsschwingungen und die dynamische Belastung vermindert, was sie für die Praxis äußerst brauchbar erscheinen läßt.

Das dynamische Verhalten von Schräg- und Pfeilverzahnung ist zwar im Grund dem von Geradverzahnung etwa

gleich, aber es wird von der Größe des Schrägungswinkels und von der Zahnbreite stark beeinflußt. D.h. bei mit hoher Geschwindigkeit laufenden Schrägverzahnungen mit größerem Schrägungswinkel und größerer Zahnbreite wurde die dynamische Belastung geringer, da sie sich über den dickeren Ölfilm mehr verteilte.

A n l a g e - I

Stabilität der Umfangsschwingungen des Zahnräderpaares

Die folgende Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten periodische Funktionen darstellen.

$$\ddot{X} + g(x) \dot{X} + k(x) X = f(x) \quad (a)$$

dabei $g(x + T_1) = g(x)$

$$k(x + T_1) = k(x)$$

$$f(x + T_2) = f(x)$$

und T_1, T_2 sind die Perioden.

$u(x)$ wird als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung der Gleichung (a) angenommen, die der folgenden Beziehung genügt:

$$u(x + T_1) = \lambda \cdot u(x) \quad , \lambda : \text{Konstante} \quad (b)$$

Da $u(x + T_1)$ eine Lösung der homogenen Gleichung der Gleichung (a) für alle Werte von λ ist, zeigt die allgemeine Lösung $u(x)$ die folgenden Eigenschaften: Für $|\lambda| < 1$ konvergiert sie gegen Null, für $|\lambda| > 1$ divergiert sie und für $|\lambda| = 1$ ergeben sich kontinuierliche Schwingungen gemäß den Anfangsbedingungen.

$v(x)$ sei eine partikuläre Lösung der Gleichung (a), dann ergibt sich:

$$\ddot{v}(x) + g(x) \dot{v}(x) + k(x) v(x) = f(x) \quad (c)$$

und die Lösung erfüllt die Beziehung

$$v(x + T) = \xi \cdot v(x)$$

Dabei ist T das kleinste gemeinsame Vielfache von T_1 und T_2 , und ξ ist eine Konstante.

Dann erhält man

$$\zeta \{ \ddot{U}(x) + g(x) \dot{U}(x) + k(x) U(x) \} = f(x) \quad (d)$$

Damit Gleichung (d) und Gleichung (c) gleichzeitig erfüllt werden, muß $\zeta = 1$ sein. $U(x)$ ist eine periodische Funktion, deren Periode das kleinste gemeinsame Vielfache der Periode von T_1 und T_2 darstellt.

Da die allgemeine Lösung $X(x)$ der Gleichung (a)

$$X(x) = A \cdot U(x) + V(x)$$

A : Konstante

ist, gilt für $X(x)$ und $U(x)$ dieselbe Stabilitätsbedingung. Diese wird durch den Wert von λ entschieden.

Für die Schwingungen des Zahnräderpaares ist $g(x) = 2 \cdot \gamma \cdot \omega(x)$ und $k(x) = \omega(x)^2$, und $\omega(x)$ kann folgendermaßen (vgl. Bild 13) ausgedrückt werden:

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_i & \text{für Finzeleingriffsstrecke } (0 \leq x \leq x_i) \\ \omega_{ii} & \text{für Doppeleingriffsstrecke } (x_i \leq x \leq x_i + x_{ii} = T_z) \end{cases} \quad (e)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung der Gleichung (1) über den entsprechenden Zeitraum ist

$$U(x) = \begin{cases} U_i(x) & (0 \leq x \leq x_i) \\ U_{ii}(x) & (x_i \leq x \leq x_i + x_{ii} = T_z) \end{cases} \quad (f)$$

$$U_i(x) = e^{-\gamma \omega_i x} (C_1 \cos \sqrt{1-\gamma^2} \cdot \omega_i x + C_2 \sin \sqrt{1-\gamma^2} \cdot \omega_i x)$$

$$U_{ii}(x) = e^{-\gamma \omega_{ii}(x-x_i)} (C_3 \cos \sqrt{1-\gamma^2} \cdot \omega_{ii}(x-x_i) + C_4 \sin \sqrt{1-\gamma^2} \cdot \omega_{ii}(x-x_i))$$

wobei die Zahnflankenabtrennung nicht berücksichtigt wird.

Bei Gleichung (f) müssen die Kontinuitätsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} u_i(t_i) &= u_{ii}(t_i) , & \dot{u}_i(t_i) &= \dot{u}_{ii}(t_i) \\ u_{ii}(T_2) &= \lambda \cdot u_i(0) , & \dot{u}_{ii}(T_2) &= \lambda \cdot \dot{u}_i(0) \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

gemäß der Gleichung (b) erfüllt werden.

Aus den Gleichungen (f) und (g) erhält man

$$\lambda^2 - 2 \cdot E \cdot N \cdot \lambda + E^2 = 0 \quad (h)$$

$$E = e^{-\zeta(\omega_i t_i + \omega_{ii} t_{ii})}$$

$$N = \cos \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_i t_i \cos \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_{ii} t_{ii} - \left\{ \frac{\omega_i^2 + \omega_{ii}^2}{2 \cdot \omega_i \omega_{ii} \cdot (1-\zeta^2)} \cdot \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \right\} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_i t_i \sin \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_{ii} t_{ii}$$

Nach der Gleichung (h) kann λ berechnet werden und die Stabilität der Umfangsschwingungen des Zahnradpaars kann sich erweisen.

A n l a g e - II

Computer-Programm für die numerische Berechnung der
Umfangsschwingungen eines Zahnräderpaares

Das Programm stützt sich auf das von Dipl.-Ing. S. Kiyono und Dipl.-Ing. H. Fukuma des Institutes für Maschinenelemente der Universität Kyoto ausgearbeitete Grundprogramm.

```

C      THEORETICAL ANALYSIS OF GEAR VIBRATION.
C      GEAR HAS SOME PITCH ERRORS.
1      WRITE(6,100)
2      100 FORMAT(1H1,5X,41HSOLUTIONS OF EQUATIONS ON GEAR VIBRATION.)
3      WRITE(6,103)
4      103 FORMAT(1H ,5X,26HGEAR HAS SOME PITCH ERRORS)
5      COMMON PAI,H,E1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
        1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
        1JJ,JK,JL
6      EXTERNAL DERIV,ANS1,ANS2
7      READ(5,101) J1,K1,L1,JJ1,M1,M4,SINGO,EPS
8      101 FORMAT(6I4,2F12.0)
9      DIMENSION Z1(2),Z2(2),AM(2),CH(2),B(2),BO(2),RO(2),CC(2),
        1BN(21,2),TRK(5,21,2)
10     READ(5,102) (Z1(J),J=1,J1),(Z2(J),J=1,J1),(PE(JJ),JJ=1,JJ1)
11     102 FORMAT(6F10.0)
12     READ(5,150) (AM(J),J=1,J1),(CH(J),J=1,J1),(B(J),J=1,J1),
        1(BO(J),J=1,J1),(RO(J),J=1,J1),(CC(J),J=1,J1)
13     150 FORMAT(6F10.0)
14     READ(5,160) ((BN(K,J),K=1,K1),J=1,J1),(((TRK(L,K,J),L=1,L1),
        1K=1,K1),J=1,J1),H,SEID,E1,E2,EL1,EL2
15     160 FORMAT(6F10.0)
16     DO 10 J=1,J1
17     CA=0.9396926
18     SA=0.3420201
19     PAI=3.141593
20     CALL SKSF(Z1(J),AM(J),CH(J),SK1,SF1,V1,W1)
21     CALL SKSF(Z2(J),AM(J),CH(J),SK2,SF2,V2,W2)
22     CALL SITRYO(Z1(J),AM(J),CH(J),B(J),BO(J),RO(J),SK1,SF1,V1)
23     GM1=HM
24     IF(Z1(J).EQ.0) GO TO 51
25     CALL SITRYO(Z2(J),AM(J),CH(J),B(J),BO(J),RO(J),SK2,SF2,V2)
26     51 GM2=HM
27     HM=GM1*GM2/(GM1+GM2)
28     WRITE(6,104) HM
29     104 FORMAT(1H ,5X,15HCONVERTED MASS=,E15.7)
30     IF(SINGO.EQ.0.0) GO TO 59
31     GM1=(SQRT((Z1(J)+2.0)**2-(Z1(J)*CA)**2)-Z1(J)*SA)/2.0
32     GM2=(SQRT((Z2(J)+2.0)**2-(Z2(J)*CA)**2)-Z2(J)*SA)/2.0
33     TA=(Z1(J)+Z2(J))*AM(J)/CC(J)
34     TB=(SQRT((TA+2.0)**2-(TA*CA)**2)-TA*SA)*CC(J)/2.0/AM(J)
35     EP=(GM1+GM2-TB)/PAI/CA
36     GO TO 58
37     59 READ(5,302) EP
38     302 FORMAT(F10.0)
39     58 WRITE(6,303) EP
40     303 FORMAT(5X,8HEPSIRON=,E15.7/)
41     DO 11 K=1,K1
42     IF(BN(K,J).EQ.0.0) GO TO 11
43     BB=BN(K,J)*Z1(J)/Z2(J)
44     TKIK=60.0/BN(K,J)/Z1(J)
45     TA=TKIK*(EP-1.0)
46     TB=TKIK*(2.0-EP)/2.0
47     TF=(TA+TB)*2.0
48     TT=TF/FLOAT(M1-1)

```

```

49      DO 12 M=1,M1
50      C(M)=TT*FLOAT(M-1)
51      CALL DELTA(Z1(J),AM(J),CH(J),BN(K,J),M,SK1,SF1,V1,W1,DEL)
52      MN=21-M
53      STR(MN)=STR(MN)/B(J)
54      DL1(M)=DEL/B(J)
55      IF(Z1(J).EQ.Z2(J)) GO TO 52
56      CALL DELTA(Z2(J),AM(J),CH(J),BB,M,SK2,SF2,V2,W2,DEL)
57      DL2(M)=DEL/B(J)
58      12 CONTINUE
59      DO 13 M=1,M1
60      MN=M1-M+1
61      AK(M)=1.0/(DL1(M)+DL2(MN))
62      13 CONTINUE
63      CALL TOKGOS(Z2(J),Z1(J),AM(J),CC(J),BN(K,J),GM1)
64      EK1=GM1
65      IF(Z1(J).EQ.Z2(J)) GO TO 53
66      CALL TOKGOS(Z1(J),Z2(J),AM(J),CC(J),BB,GM1)
67      53 EK2=GM1
68      WRITE(6,105) TKIK,TA,TB,TF,EK1,EK2
69      105 FORMAT(1H1,6HTKIKA=,E15.7,2X,3HTA=,E15.7,2X,3HTB=,E15.7,2X,3HTF=,
70      1E15.7//5X,4HEK1=,E15.7,2X,4HEK2=,E15.7//)
71      WRITE(6,106)
72      106 FORMAT(1H ,5X,5HTIME=,20X,12HKOWASA(1MAI)/)
73      DO 17 M=1,M1
74      WRITE(6,107) C(M),AK(M),STR(M)
75      107 FORMAT(1H ,3(5X,E15.7))
76      17 CONTINUE
77      DO 14 L=1,L1
78      IF(TRK(L,K,J).EQ.0.0) GO TO 14
79      WRITE(6,173) BN(K,J),TRK(L,K,J)
80      173 FORMAT(1H0,2HN=,E15.7,15HRPM TORQUE=,E15.7//)
81      WK=TRK(L,K,J)*7.0/AM(J)/Z1(J)/CA
82      WRITE(6,108) WK
83      108 FORMAT(1H0,5X,8HKAJYU W=,E15.7)
84      DIMENSION Y(2),Q01(50),Q02(50)
85      TC1=60.0*EL1/(PAI*AM(J)*Z1(J)*CA*BN(K,J))
86      TC2=60.0*EL2/(PAI*AM(J)*Z2(J)*CA*BN(K,J))
87      READ(5,109) Y(1),Y(2)
88      109 FORMAT(2F10.0)
89      MN=0
90      20 JJ=MOD(MN,JJ1)+1
91      JK=MOD(MN+1,JJ1)+1
92      JL=MOD(MN+2,JJ1)+1
93      CALL RKM(2,TKIK,0.0,EPS,Y,M4,DERIV,ANS1)
94      MN=MN+1
95      Y(1)=P1
96      Y(2)=P2
97      IF(MN.GE.5*JJ1) GO TO 31
98      Q01(JJ)=Q1
99      Q02(JJ)=Q2
100     IF(MN.LE.JJ1) GO TO 20
101     JJ2=JJ1
102     IF(Q01(JK)*Q02(JK).EQ.0.0) GO TO 20
103     IF(ABS(1.0-P1/Q01(JK)).GT.SEID) GO TO 20

```

```

103      IF(ABS(1.0-P2/@@2(JK)),GT,SEID) GO TO 20
104      GO TO 32
105      31 JJ2=2*JJ1
106      32 MNN=MN
107      WRITE(6,305) P1,P2
108      305 FORMAT(1H0,5X,3HP1=,E15.7,5X,3HP2=,E15.7)
109      30 JJ=MOD(MN, JJ1)+1
110      JK=MOD(MN+1, JJ1)+1
111      JL=MOD(MN+2, JJ1)+1
112      CALL RKM(2,TKIK,0.0,EPS,Y,M4,DERIV,ANS2)
113      WRITE(6,207) PE(JJ),PE(JK),PE(JL)
114      207 FORMAT(1H0,10X,21HCIRCULAR PITCH ERROR=,E15.7,2X,4HTHEN,1X,
115      1E15.7,2X,4HTHEN,1X,1H(,E15.7,1H),2X,2HMM)
116      205 FORMAT(1H0,3HAT=,E15.7,3X,3HPC=,E15.7,3X,3HPV=,E15.7,3X,3HPT=,
117      1E15.7//)
117      MN=MN+1
118      Y(1)=P1
119      Y(2)=P2
120      IF(MN.GE.MNN+JJ2) GO TO 26
121      GO TO 30
122      26 WRITE(6,206) E1,E2,T01,T02
123      206 FORMAT(1H0,3HE1=,E15.7,3X,3HE2=,E15.7,3X,4HT01=,E15.7,
124      13X,4HT02=,E15.7////)
124      14 CONTINUE
125      11 CONTINUE
126      10 CONTINUE
127      STOP
128      END

```

```

1      SUBROUTINE SKSF(Z,BM,CE,SK,SF,V,W)
2      COMMON PA1,H,E1,E2,TK1K,TA,TF,T,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JK,JL
3      A=0.3490659
4      CA=0.9396926
5      TAN=0.3639702
6      XX=CA/(1.0+2.0/Z)
7      ACX=ATAN(SQRT(1.0/XX**2-1.0))
8      SK=BM*(Z+2.0)*SIN(PI/2.0/Z+TAN-A+ACX-SIN(ACX)/COS(ACX))
9      AN=BM*(2.0+CE)
10     IF(Z.GE.33.0) GO TO 20
11     SF=BM*Z*CA*SIN(PI/2.0/Z+TAN-A)
12     V=BM*(1.0+CE-(1.0-CA)*Z/2.0)
13     GO TO 21
14     20 YY=CA/(1.0-2.0/Z)
15     ACY=ATAN(SQRT(1.0/YY**2-1.0))
16     SF=BM*(Z-2.0)*SIN(PI/2.0/Z+TAN-A+ACY-SIN(ACY)/COS(ACY))
17     V=BM*CE
18     21 W=(AN*SF-V*SK)/(SF-SK)
19     WRITE(6,110) Z,BM,CE,SK,SF,V,AN,W
20     110 FORMAT(1H0,5X,2HZ=,F4.0,3X,2HM=,F4.0,3X,2HK=,F8.4//3X,3H$K=,E15.7,
12X,3H$F=,E15.7,2X,2HV=,E15.7,2X,2HN=,E15.7//,5X,2HW=,E15.7/)
21     RETURN
22     END

```

```

1      SUBROUTINE SITRYO(Z,BM,CE,A1,A2,R,SK,SF,V)
2      COMMON PAI,H,E1,E2,TK1K,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JK,JL
3      CA=0.9396926
4      RO=0.00784
5      RK=BM*(Z/2.0+1.0)
6      RG=BM*Z*CA/2.0
7      RF=BM*(Z/2.0-1.0-CE)+V
8      RR=BM*(Z/2.0-1.0-CE)
9      HM=RO*A1/RG**2*(PAI*RR**4/2.0+Z/3.0*((SF-SK)*(RF+RK)*(RF**2+RK**2)
1/4.0+SK*RK**3-SF*RR**3))+RO*A2*PAI*RR**4/2.0/RG**2
10     HM=HM/1000.0/9800.0
11     WRITE(6,111) A1,A2,R,RK,RG,RF,RR,HM
12     111 FORMAT(5X,2HB=,F8.3,3X,3HB0=,F8.3,3X,3HRO=,F8.3//5X,3HRK=,E15.7,
13X,3HRG=,E15.7,3X,3HRF=,E15.7,3X,3HRR=,E15.7//5X,7HMASS M=,E15.7/)
13     RETURN
14     END

```

```

1      SUBROUTINE DELTA(Z,BM,CE,BN1,M,SK,SF,V,W,DEL)
2      COMMON PAI,H,E1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JL
3      A=0.3490659
4      CA=0.9396926
5      TAN=0.3639702
6      YR=21000.0
7      PU=0.3
8      RK=BM*(Z/2.0+1.0)
9      RG=BM*Z*CA/2.0
10     FIK=SQRT(1.0-(RG/RK)**2)*RK/RG-PAI/2.0/Z-TAN*A
11     AA=FIK+2.0*PAI*(C(M)-TF)/TKIK/Z
12     TANG=PAI/2.0/Z+TAN-A+AA
13     RA=RG*SQRT(1.0+TANG**2)
14     G=ATAN(TANG)
15     IF(Z.GE.33.0) GO TO 40
16     FA=(RA-BM*Z*CA/2.0)*COS(G-AA)+V
17     GO TO 41
18 40  FA=(RA-BM*(Z/2.0-1.0-CE)-V)*COS(G-AA)+V
19 41  BD=COS(AA)**2/YR
20     DB1=BD+12.0*V/SF**3*(FA**2+V**2/3.0-FA*V)
21     DB2=BD+6.0*(W-V)**3/SF**3*((W-FA)/(W-V))*((4.0-(W-FA)/(W-V))-3.0
1-2.0*ALOG((W-FA)/(W-V)))
22     DS=2.0*(1.0+PO)*BD/SF*(V-(W-V)*ALOG((W-FA)/(W-V)))
23     DG=24.0/PAI*BD*(FA/SF)**2
24     DP=1.522**2/2.0/YR
25     DEL=DB1+DB2+DS+DG+DP
26     YA=RA*SIN(G-AA)
27     SGM1=6.0*FA*COS(AA)/SF**2
28     SGM2=6.0*YA*SIN(AA)/SF**2
29     SGM3=SIN(AA)/SF
30     SGM4=COS(AA)/SF
31     MN=21-M
32     STR(MN)=0.66*SGM1+0.4*SQRT(SGM1**2+36.0*SGM4**2)+1.4*SGM3-SGM2
33     RETURN
34     END

```

```

1      SUBROUTINE TOKGOS(ZG,ZP,BM,CE,BN1,EK)
2      COMMON PA1,H,F1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JK,JL
3      CA=0.9396926
4      SA=0.3420201
5      TAN=0.3639702
6      R01=BM*ZG/2.0+CE*ZG/(ZG+ZP)
7      R02=R01*ZP/ZG
8      RG=BM*ZP*CA/2.0
9      RK=BM*(ZP/2.0+1.0)
10     E3=R02/2.0*(PA1*BN1/30.0)**2*(1.0+R01/R02)*SA
11     EK=E3/((1.0+R01/R02)*TAN*RG/SQRT(RK**2-RG**2)-1.0)
12     RETURN
13     END

```



```

1      SUBROUTINE DERIV(N,X,Y,F)
2      DIMENSION Y(N),F(N)
3      COMMON PAI,H,E1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JK,JL
4      ES=FE1(JK,TF-X)+FE2(X)
5      IF(X.GT.TF/2.0) GO TO 10
6      EM=FE1(JJ,TA-X)+FE2(TKIK+X)
7      GO TO 20
8      10 EM=FE1(JL,TF+TKIK-X)+FE2(X-TKIK)
9      20 IF(Y(1).LT.EM) GO TO 30
10     IF(Y(1).LT.ES) GO TO 40
11     BK1=BKF(X)
12     BK2=BKF(TKIK+X)
13     GO TO 77
14     30 IF(Y(1).LT.ES) GO TO 50
15     BK1=BKF(X)
16     BK2=0.0
17     GO TO 77
18     40 BK1=0.0
19     BK2=BKF(X+TKIK)
20     GO TO 77
21     50 BK1=0.0
22     BK2=0.0
23     77 BK=BK1+BK2
24     G=WK+BK1*ES+BK2*EM
25     D=2.0*H*SQRT(BK*HM)
26     F(1)=Y(2)
27     F(2)=(G-BK*Y(1)-D*Y(2))/HM
28     AK(30)=F(2)
29     RETURN
30     END

```

```
1      FUNCTION BKF(T)
2      COMMON PAI,H,E1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,MM,WK,ES,EM,BK1
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
IJJ,JK,JL
3      MA=FIX(T/TT)+1
4      IF(T.LE.0.0) GO TO 10
5      IF(T.GE.TF) GO TO 20
6      BKF=AK(MA)+(AK(MA+1)-AK(MA))*(T-C(MA))/TT
7      GO TO 30
8      10 BKF=AK(1)
9      GO TO 30
10     20 BKF=AK(M1)
11     30 RETURN
12     END
```

```
1      FUNCTION FE1(N,T)
2      COMMON PA1,H,E1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
      1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
      1JJ,JK,JL
3      IF(T,GE,T01) GO TO 10
4      IF(T,GE,0.0) GO TO 20
5      FE1=E1+EK1*T*T+PE(N)
6      GO TO 30
7      10 FE1=PE(N)
8      GO TO 30
9      20 FE1=E1*(T01-T)/T01+PE(N)
10     30 RETURN
11     END
```

```
1      FUNCTION FE2(T)
2      COMMON PA1,H,E1,E2,TK1K,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
      1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
      1JJ,JK,JL
3      IF(T.GE.T02) GO TO 10
4      IF(T.GE.0.0) GO TO 20
5      FE2=E2+EK2*T*T
6      GO TO 30
7      10 FE2=0.0
8      GO TO 30
9      20 FE2=E2*(T02-T)/T02
10     30 RETURN
11     END
```

```
1      SUBROUTINE ANS1(N,X,Y)
2      DIMENSION Y(N)
3      COMMON PAI,H,E1,E2,TK,IK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,MM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JK,JL
4      IF(X.EQ.0.0) GO TO 1
5      GO TO 2
6      1 Q1=Y(1)
7      Q2=Y(2)
8      WRITE(6,120) Q1,Q2
9      120 FORMAT(1H ,5X,3H Q1=,E15.7,5X,3H Q2=,E15.7)
10     GO TO 3
11     2 P1=Y(1)
12     P2=Y(2)
13     3 RETURN
14     END
```

```

1      SUBROUTINE ANS2(N,X,Y)
2      DIMENSION Y(N)
3      COMMON PA1,H,F1,E2,TKIK,TA,TF,TT,T01,T02,EK1,EK2,HM,WK,ES,EM,BK1,
1BK2,P1,P2,Q1,Q2,M1,C(30),DL1(30),DL2(30),AK(30),STR(30),PE(10),
1JJ,JK,JL
4      MA=FIX(X/TT)+1
5      IF(X.GT.TF/2.0) GO TO 4
6      IF(X.GT.TA) GO TO 5
7      M3=FIX((TKIK+X)/TT)+1
8      ST2=STR(MB)+(X+TKIK-C(MB))*(STR(MB+1)-STR(MB))/TT
9      GO TO 6
10     5 ST2=STR(M1)
11     GO TO 4
12     4 ST2=STR(1)
13     6 ST1=(STR(MA+1)-STR(MA))*(X-C(MA))/TT+STR(MA)
14     AB=BK1*(Y(1)-ES)*ST1
15     BC=BK2*(Y(1)-EM)*ST2
16     XE1=Y(1)-ES
17     XE2=Y(1)-EM
18     TD=TKIK+X
19     IF(X.GT.TF/2.0) TD=X-TKIK
20     IF(X.LE.0.0) GO TO 7
21     WRITE(6,200)
22     200 FORMAT(1H0,4X,5HTIME=,10X,9HKASOKUDO=,9X,7HK(X-E)=,13X,2HT=,12X,
17HK(X-E)=,8X,4HX-ES,12X,4HX-EM)
23     WRITE(6,201) X,AK(30),AB,TD,BC,XE1,XE2
24     201 FORMAT(1H ,7(F15.7,1X))
25     WA2=0.0
26     WA1=0.0
27     TIME=0.0
28     PV=0.0
29     PT=0.0
30     GO TO 8
31     7 TM=(X-TIME)/TKIK
32     IF(PV.GE.Y(1)) GO TO 3
33     PV=Y(1)
34     P1=X
35     3 WA2=WA2+AK(30)**2*TM
36     WA1=WA1+AK(30)**2*TM*(BK1+BK2)/HM
37     TIME=X
38     WRITE(6,203) X,AK(30),AB,TD,BC,XE1,XE2
39     203 FORMAT(1H ,7(E15.7,1X))
40     IF(X.LT.TKIK-0.00001) GO TO 8
41     C(30)=SQRT(WA2)
42     DL1(30)=SQRT(WA1)
43     DL1(29)=PV
44     DL1(28)=PT
45     8 P1=Y(1)
46     P2=Y(2)
47     RETURN
48     END

```

```

1      SUBROUTINE RKM(N,B,A,EPS,Y,M,DERIV,ANS)
C      SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY RKM METHOD
C      N=NUMBER OF UNKNOWN VARIABLES (LESS THAN N)
C      B=UPPER BOUND
C      A=LOWER BOUND
C      EPS=TOLERANCE
C      Y=ARRAY NAME FOR Y(1),Y(2),...,Y(N)
C      2**M=NUMBER OF SUBDIVISIONS
C      DERIV=SUBROUTINE FOR COMPUTING DERIVATIVES F(1),F(2),...,F(N) FOR
C      X,Y(1),Y(2),...,Y(N)
C      ANS=SUBROUTINE FOR PRINTING SOLUTIONS
2      DIMENSION Y(N),Y1(40),F(40),F1(40),F2(40),Y2(40)
3      LOGICAL INCR
4      X=A
5      HC=(B-A)/2.0**M
6      ILOC=2**M
7      LOC=0
8      80 CALL DERIV(N,X,Y,F)
9      DO 10 J=1,N
10     Y1(J)=Y(J)+HC/3.0*F(J)
11     CALL DERIV(N,X+HC/3.0,Y1,F1)
12     DO 20 J=1,N
13     Y1(J)=Y(J)+HC/6.0*(F(J)+F1(J))
14     CALL DERIV(N,X+HC/3.0,Y1,F1)
15     DO 30 J=1,N
16     Y1(J)=Y(J)+HC/8.0*(F(J)+3.0*F1(J))
17     CALL DERIV(N,X+HC/2.0,Y1,F2)
18     DO 40 J=1,N
19     Y1(J)=Y(J)+HC/2.0*(F(J)-3.0*F1(J)+4.0*F2(J))
20     CALL DERIV(N,X+HC,Y1,F1)
21     DO 50 J=1,N
22     Y2(J)=Y(J)+HC/6.0*(F(J)+4.0*F2(J)+F1(J))
23     INCR=.TRUE.
24     DO 60 J=1,N
25     ERROR=0.2*ABS(Y1(J)-Y2(J))
26     IF(ERROR.LT.EPS) GO TO 70
27     HC=HC/2.0
28     ILOC=ILOC+ILOC
29     LOC=LOC+LOC
30     GO TO 30
31     70 IF(ERROR.LT.(EPS/64.0)) GO TO 60
32     INCR=.FALSE.
33     60 CONTINUE
34     CALL ANS(N,X,Y)
35     X=X+HC
36     DO 100 J=1,N
37     Y(J)=Y2(J)
38     LOC=LOC+1
39     IF(LOC.NE.ILOC) GO TO 110
40     CALL ANS(N,X,Y)
41     RETURN
42     110 IF((ILOC.GT.LOC).AND.(INCR).AND.(LOC/2*2.EQ.LOC).AND.(ILOC.GT.1))
43         GO TO 80
44     120 ILOC=ILOC/2

```

```
45      LOC=LOC/2
46      HC=HC+HC
47      GO TO 80
48      END
```


Anlage - III

Eingriffsstoß

Bild A-1 zeigt das Modell eines Zahnräderpaares am Eingriffsbeginn, wie es bereits von Reswick verwendet wurde [6]. Zwei Massen, bei denen nur die Horizontalbewegung berücksichtigt wird, werden über das Zähnepaar (1) gegeneinander gedrückt. Der Eingriffsstoß des neu in Eingriff kommenden Zähnepaares (2) wird zu einem vertikalen Stoß des Daumens D vereinfacht. Um den jeweiligen Berührungspunkt auf der Berührungsfläche des Daumens festlegen zu können, stellte Reswick die Hypothese auf, daß sich der Daumen bis zum vollkommenen Flankenkontakt mit konstanter Beschleunigung bewegt. Aber die Hypothese konnte nicht überzeugen, so wurde die folgende Betrachtung hier angestellt:

t_{af} sei der Zeitpunkt, zu dem der Daumen den Gegenzahn berührt. In allgemeinen hat t_{af} ein negatives Vorzeichen, und solange keine Berührung an der Zahnkopfkante stattfindet, ist $t_{af}=0$. Bild A-2 zeigt den Daumen während

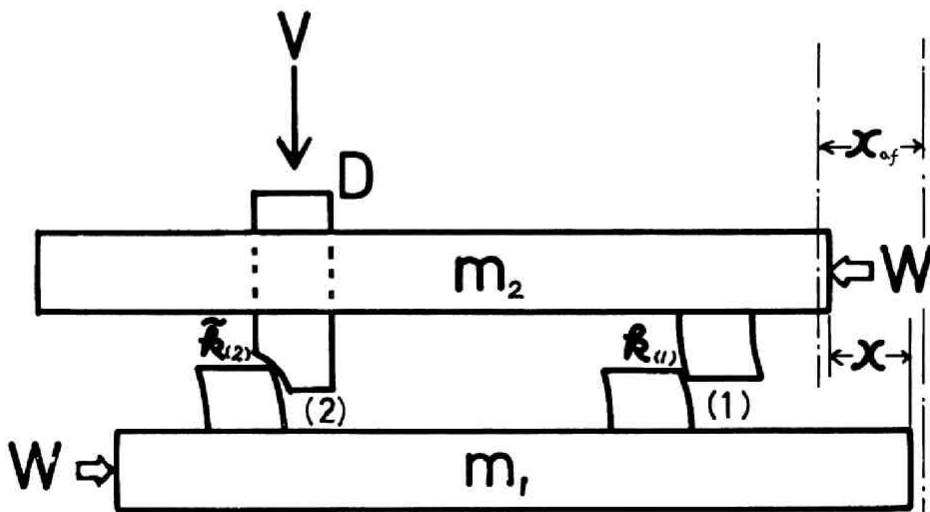


Bild A-1. Modell für dem Eingriffsstoß nach Reswick

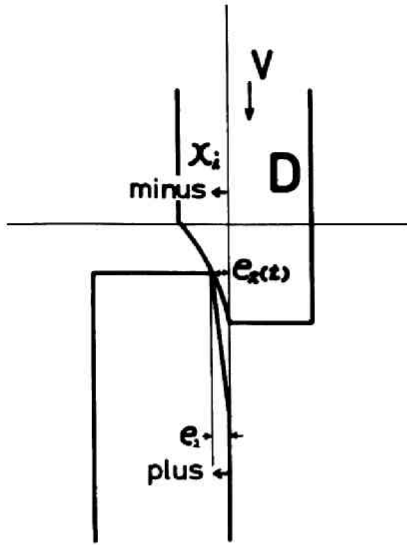


Bild A-2. Daumen während der Zahnkopfkantenberührung

des Eingriffsstoßes. Der jeweilige Berührungspunkt auf der Berührungsfläche des Daumens ist durch $e_x(t)$ gegeben, und e_z repräsentiert die Gesamtzahnfehler des Zähnepaares (2), die während der Zahnkopfkantenberührung wirksam werden. Die Anfangsbedingungen für die Bewegung des Daumens sind

$$\left. \begin{aligned} e_x(t_{af}) &= -e_z \\ e_x(0) &= -x_{af} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

dabei ist x_{af} die Differenz zwischen dem Drehweg des

Abtriebszahnrades und dem des Antriebszahnrades auf der Eingriffslinie zur Zeit $t = t_{af}$. Angenommen, die durch den Eingriffsstoß sich ergebende Schwankung in der Umfangsgeschwindigkeit sei weit kleiner als die Betriebsgeschwindigkeit V auf der Eingriffslinie. Dann kann die Geschwindigkeit V des Daumens als näherungsweise konstant angesehen werden.

Bild A-3 zeigt die fiktive Lage zur Zeit der Zahnkopfkantenberührung (Zeitpunkt zwischen t_{af} und 0), unter der Annahme, daß sich das Zahnradpaar mit konstantem x_{af} dreht. Q bezeichnet einen der Zahnkopfkante des getriebenen Zahnrades entsprechenden angenommenen Punkt $x_{af} = 0$. Q' zeigt den Schnittpunkt mit der Eingriffslinie und der entsprechenden, dem Antriebszahnrad zugehörigen Evolvente, die durch Q geht. B ist der Schnittpunkt der Eingriffslinie mit dem Kopfkreis des getriebenen Zahnrades. P ist der Schnittpunkt der Flankenkurve des Antriebszahnrades mit dem Kopfkreis

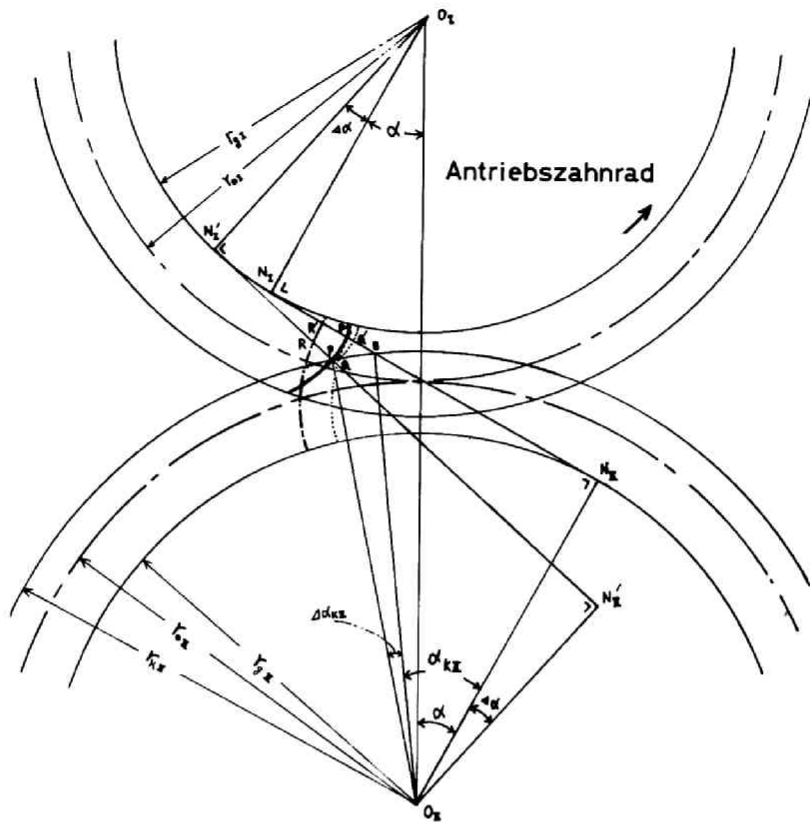


Bild A-3. Bestimmung des angenommenen Zahnkopffehlers $C_x(z)$, entsprechend der Daumenkonturform

des getriebenen Zahnrades. P' ist der Schnittpunkt der Flankenkurve des Antriebszahnrades mit der Eingriffslinie. R zeigt den Schnittpunkt der verlängerten Flankenkurve des getriebenen Zahnrades, das sich mit einem bestimmten, angenommenen Wert von χ_{af} dreht, mit der den Grundkreis des Antriebszahnrades berührenden Tangente durch P . Und R' ist der Schnittpunkt der Eingriffslinie mit der dem Antriebszahnrad zugehörigen

Evolute durch R. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} R'Q' &= x_{af} + e_z \\ R'P' &= e_z(t) + e_z \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

(normalerweise haben x_{af} und $e_z(t)$ negative Vorzeichen)

Nach Bild A-3, ist:

$$\Delta \alpha = \angle N_1 O_1 N_1' = \angle N_2 O_2 N_2'$$

$$\Delta \alpha_{kx} = \angle PO_2 B$$

$$\Delta l = \overline{P'B}$$

$$\Delta x_0 = \widehat{PQ}$$

dann ergibt sich:

$$\Delta l \frac{r_{0x}}{r_{g1}} = \Delta \alpha_{kx} \cdot r_{0x} - \Delta x_0 \frac{r_{0x}}{r_{kx}} \quad (c)$$

$$(r_{0x} + r_{0x}) \cdot \cos(\alpha + \Delta \alpha) = r_{0x} \cos \alpha + r_{kx} \cdot \cos(\alpha_{kx} + \Delta \alpha_{kx} + \Delta \alpha) \quad (d)$$

$$\begin{aligned} (r_{0x} + r_{0x}) \cdot \sin(\alpha + \Delta \alpha) &= r_{kx} \sin(\alpha_{kx} + \Delta \alpha_{kx} + \Delta \alpha) \\ &= r_{0x} \cdot \cos \alpha \cdot \Delta \alpha + (r_{0x} + r_{0x}) \sin \alpha - r_{kx} \sin \alpha_{kx} \quad \Delta l \end{aligned} \quad (e)$$

Aus Gleichungen (c), (d), (e) bekommt man, unter der Näherungsbestimmung, daß $\Delta \alpha_{kx}$ und $\Delta \alpha$ um ein Vielfaches kleiner sind als α_{kx} und α ,

$$P'Q' = C \Delta l^2 \quad (f)$$

dabei ist

$$C = \frac{\left(1 + \frac{r_{0x}}{r_{0x}}\right) \cdot \frac{t_g \alpha}{\cos \alpha}}{2 r_{0x} \left\{ \left(1 + \frac{r_{0x}}{r_{0x}}\right) \cdot \frac{t_g \alpha}{t_g \alpha_{kx}} - 1 \right\}} \quad (g)$$

Aus der Hypothese, daß V konstant ist, ergibt sich:

$$\Delta l = V t \quad (h)$$

Damit erhält man

$$e_x(t) = c \cdot v^2 t^2 - x_{af} \quad (i)$$

und aus den Gleichungen (a) und (i)

$$t_{af} = \sqrt{\frac{x_{af} - e_2}{c \cdot v^2}} \quad (j)$$

Beim Zweimassen-System nach Bild A-1 werden die Bewegungsgleichungen im Zeitabschnitt zwischen t_{af} und 0, wo die Lagedifferenz der beiden Massen (d.h. x) kleiner wird als x_{af} , zu

$$\begin{aligned} m_I \ddot{x}_I &= W - \{ k_{av} (x - e_{av}) + \tilde{k}_{av} (x - e_2 - c \cdot v^2 t^2) \} \\ m_{II} \ddot{x}_{II} &= \{ k_{av} (x - e_{av}) + \tilde{k}_{av} (x - e_2 - c \cdot v^2 t^2) \} - W \end{aligned}$$

dabei zeigt \tilde{k}_{av} den Wert während der Zahnkopfkantenberührung. Man erhält, unter Einsetzung eines Dämpfungsgliedes $D \dot{x}$, die folgende Bewegungsgleichung der Umfangsschwingungen zur Zeit des Eingriffstoßes:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + D \dot{x} + (k_{av} + \tilde{k}_{av}) x \\ = W + k_{av} e_{av} + \tilde{k}_{av} (e_{av} + c \cdot v^2 t^2) \end{aligned} \quad (k)$$

Schrifttum

- [1] Heyman, P.: Mathematical Theory of Dynamic Stress in Rotating Gear Pinions. Mech. Eng. 46 (1924)
- [2] The Influence of Elasticity on Gear Tooth Loads. Progress Report No.4 of ASME. Special Research Committee on Strength of Gear Teeth. Mech. Eng. 49 (1927)
- [3] Buckingham, E.: Analytical Mechanics of Gears. McGraw Hill. 1949
- [4] Tuplin, W.A.: Gear Load Capacity. Sir Issac Pitman & Sons Ltd. 1961
- [5] Strauch, H.: Zahnradschwingungen. VDI-Z 95 (1953)
- [6] Reswick, J.B.: Dynamic Loads on Spur and Helical Gear Teeth. Trans. ASME July 1955
- [7] Zeman, J.: Dynamische Zusatzkräfte in Zahnradgetriebe. VDI-Z 99 Nr.6 Feb. 1957
- [8] Harris, S.L.: Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears. The Inst. Mech. Eng. Proc. (172) 2, 1958
- [9] Bosch, M.: Über das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben mit besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit. Dissertation. T.H. Aachen 1965
- [10] 歌川, 「平歯車の動荷重」 機誌 61巻470号 (昭33-3) p56-62
Utagawa, M.: Dynamic Loads on Spur Gear Teeth. Journal of JSME Vol.61 No.470 (March 1958) S.56/62
- [11] 歌川, 原田, 「高速度における平歯車の動荷重 (圧力角誤差の影響) と減速, 増速かみあいの比較」 機論 27巻175号 (昭36-3) p310-318
Utagawa, M., Harada, T.: Dynamic Loads on Spur Gear Teeth at High Speed (Influence of the Pressure Angle Errors and Comparison between the Reduction Gears and the Speed-up Gears). Trans. JSME Vol.27 No.175 (March 1961) S.310/318

- [12] 歌川, 原田, 「ピッチ誤差のある歯車の高速度における動荷重」 機論 27 巻
181 号 (昭 36-9) P1468-1476
Utagawa, M., Harada, T.: Dynamic Loads on Spur Gear Teeth
Having Pitch Errors at the High Speed. Trans. JSME
Vol. 27 No. 181 (Sept. 1961) S. 1468/1476
- [13] 寺内 ほか, 「平歯車における動荷重の考察 (かみあい誤差の影響)」
機論 33 巻 247 号 (昭 42-3) P465-472
Terauchi, Y. et al: Dynamic Behavior of Spur Gears (In-
fluence of the Meshing Errors). Trans. JSME Vol. 33 No. 247
(March 1967) S. 465/472
- [14] Niemann, G., Rettig, H.: Dynamische Zahnkräfte, Teil I;
Versuchsergebnisse über den Einfluß von Geschwindigkeit,
Belastung, Zahnfehlern und Masse auf die zusätzliche
dynamische Zahnkraft. VDI-Z 99 (1957)
- [15] 釘宮, 「はすば歯車の動的歯元応力について」 機論 30 巻 214 号 (昭 39-6) P661-671
Kugimiya, H.: Dynamic Stresses in Helical Gear Teeth.
Trans. JSME Vol. 30 No. 214 (June 1964) S. 661/671
- [16] Thompson, R.A.: Dynamic Gear Loads. G.E. Technical
Information Series No. 67-C 330 Aug. 1967
- [17] McIntire, W.L., Lyon, T.A.: Advancement of Helical Gear
Design Technology. U.S. Army Aviation Material Lab.
Tech. Report 68-47 July 1968, Prepared by Allison Div.
General Motors, Allison Div. Report EDR 5503
- [18] 会田 ほか, 「歯車の振動, 騒音に関する基礎的研究 (第 1 報, 平歯車の円周方向振動と
騒音の関係)」 機論 34 巻 268 号 (昭 43-12) P2226-2236
Aida, T. et al: Fundamental Research on Gear Noise and
Vibration (1st Report, Relation between Noise and
Circumferential Vibration in Spur Gear). Trans. JSME
Vol. 34 No. 268 (Dec. 1968) S. 2226/2236
- [19] 会田 ほか, 「歯車の振動, 騒音に関する基礎的研究 (第 2 報, 歯車の振動, 騒音に
およぼす回転数の影響)」 機論 34 巻 268 号 (昭 43-12) P2237-2245
Aida, T. et al: Fundamental Research on Gear Noise and
Vibration (2nd Report, Influence of Revolutioal Speed
on Gear Noise and Vibration). Trans. JSME Vol. 34 No. 268
(Dec. 1968) S. 2237/2245

- [20] 会田ほか,「歯車の振動,騒音に関する基礎的研究 (第3報, 歯車の振動, 騒音におよぼすトルクの影響)」, 機論 34巻268号 (昭43-12) p2246-2253
Aida, T. et al: Fundamental Research on Gear Noise and Vibration (3rd Report, Influence of Applied Torque on Gear Noise and Vibration). Trans.JSME Vol.34 No.268 (Dec. 1968) S.2246/2253
- [21] 会田ほか,「歯車の振動,騒音に関する基礎的研究 (第4報, 歯車の3方向振動と騒音の関係)」, 機論 34巻268号 (昭43-12) p2254-2264
Aida, T. et al: Fundamental Research on Gear Noise and Vibration (4th Report, Relation among 3-Dimensional Vibration and Noise of Spur Gear). Trans.JSME Vol.34 No.268 (Dec. 1968) S.2254/2264
- [22] 会田ほか,「歯車の振動,騒音に関する基礎的研究 (第5報, 円周方向振動の特徴)」, 機論 35巻278号 (昭44-10) p2113-2119
Aida, T. et al: Fundamental Research on Gear Noise and Vibration (5th Report, Characteristics of Circumferential Vibration). Trans.JSME Vol.35 No.278 (Oct.1969) S.2113/2119
- [23] 中村,「歯車の騒音に関する研究 (第1報, 騒音測定法の検討および歯車騒音におよぼす各種要因について)」, 機論 32巻238号 (昭41-6) p1001-1006
Nakamura, K.: Research on Gear Noise. Trans.JSME Vol.32 No.238 (June 1966) S.1001/1006
- [24] 中村,「歯車の騒音に関する研究 (第2報, 動荷重と騒音の関係)」, 機論 32巻238号 (昭41-6) p1007-1013
Nakamura, K.: Research on Gear Noise (2nd Report, Relation between Dynamic Load and Gear Noise). Trans.JSME Vol.32 No.238 (June 1966) S.1007/1013
- [25] 中村,「歯車の騒音に関する研究 (第3報, 分離時に生ずる異常音について)」, 機論 33巻245号 (昭42-1) p160
Nakamura, K.: Research on Gear Noise (3rd Report, Studies about Noise Due to Separation). Trans.JSME Vol.33 No.245 (Jan. 1967) S.160

- [26] 中村, 「歯車の騒音に関する研究 (第4報, 歯車本体の振動によつて放射される音場について)」, 機論 33巻248号 (昭42-4) p648
Nakamura, K.: Research on Gear Noise (4th Report, Sound Field Radiated from the Vibrating Gear Blank). Trans. JSME Vol.33 No.248 (April 1967) S.648
- [27] Borsoff, V.N.: On the Mechanism of Gear Lubrication. Trans. ASME (Journal of Basic Eng.) March 1959
- [28] Proceeding of a Symposium organized by the Mechanical Tests of Lubricants. Panel of the Institute of Petroleum and held at the Hotel Metropole, Brighton, 21-23 Oct. 196.
- [29] Broersma, G.: Marine Gears. Ships and Marine Engines Vol. VIII, edited by W.P.A van Lammeren M.R.I.N.A. published by Haarlem (Netherland) 1961
- [30] 会田, 寺内, 「平歯車の曲げ応力について (第1報, すみ内部応力と内部応力)」, 機論 27巻178号 (昭36-6) p853-862
Aida, T., Terauchi, Y.: On the Bending Stress of Spur Gear (1st Report, Stress at the Fillet Curve and Inner Stress at the Root of Gear Tooth). Trans. JSME Vol.27 No.178 (June 1961) S.853/862
- [31] 会田, 寺内, 「平歯車の曲げ応力について (第2報, 歯の応力集中係数と曲げ応力計算式)」, 機論 27巻178号 (昭36-6) p862-868
Aida, T., Terauchi, Y.: On the Bending Stress of Spur Gear (2nd Report, The Stress Concentration Factor and the Equation for the Calculation of Bending Stress of Gear Tooth). Trans. JSME Vol.27 No.178 (June 1961) S.862/868
- [32] Niemann, G.: Maschinenelemente II, (1965), 77, Springer Verlag S.76/123
- [33] 日本機械学会動力伝達用歯車設計資料調査研究分科会, インボリュート円筒歯車の負荷容量計算式, 機誌 72巻600号 (昭44-1)
Berechnungsgleichungen für Tragfähigkeit der Stirnverzahnungen, Journal of JSME Vol.72 No.600 (Jan. 1969) S.148/159

34) BS No.436, 1940 S.28/31 (Part 7)

35) Duddley,D.: Gear Handbook, Chap 13, McGraw Hill 1962

